Modules homotopiques (Homotopy modules)

Frédéric Déglise

MODULES HOMOTOPIQUES

par

Frédéric Déglise

Résumé. — En s'appuyant sur certains de nos précédents articles, nous comparons au-dessus d'un corps parfait k la catégorie des faisceaux invariants par homotopie avec transferts introduite par V. Voevodsky à celle des modules de cycles introduite par M. Rost : la première est une sous-catégorie pleine de la seconde. Utilisant la construction récente par D.C Cisinski et l'auteur d'un version non effective $DM(k)$ de la catégorie des complexes motiviques, nous étendons ce résultat et montrons que la catégorie des modules de cycles et le coeur d'une t-structure naturelle sur $DM(k)$ qui généralise la t-structure homotopique des complexes motiviques. Nous illustrons ces résultats en prouvant que la suite spectrale du coniveau pour la cohomologie d'un k-schéma lisse représentée par un objet de $DM(k)$ coïncide avec la suite spectrale d'hypercohomologie pour la t-structure homotopique, généralisant un résultat classique de S. Bloch et A. Ogus.

***Abstract* (Homotopy modules).** — Based on previous works, we compare over a perfect field k the category of homotopy invariant sheaves with transfers introduced by V. Voevodsky and the category of cycle modules introduced by M. Rost : the former is a full subcategory of the latter. Using the recent construction by D.C. Cisinski and the author of a non effective version $DM(k)$ of the category of motivic complexes, we show that cycle modules form the heart of a natural t-structure on $DM(k)$, generalising the homotopy t-structure on motivic complexes. We enlighten these results by proving that the coniveau spectral sequence for the cohomology of a smooth k-scheme represented by an object of $DM(k)$ coincides with the hypercohomology spectral sequence for the homotopy t-structure, generalising a classical result of S. Bloch and A. Ogus

Table des matières

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 14F42, (14C15, 14C35).
Mots clefs. — motifs mixtes, complexes motiviques, modules de cycles, filtration par coniveau.

L'auteur est partiellement financé par l'ANR, projet no. ANR-07-BLAN-0142 ≪ Méthodes à la Voevodsky, motifs mixtes et Géométrie d'Arakelov ≫.

Introduction. —

Théorie de Voevodsky. — Dans sa théorie des complexes motiviques sur un corps parfait k, V. Voevodsky introduit le concept central de faisceau Nisnevich invariant par homotopie avec transferts, que nous appellerons simplement faisceau homotopique. Rappelons qu'un faisceau homotopique F est un préfaisceau de groupes abéliens sur la catégorie des k-schémas algébriques lisses, fonctoriel par rapport aux correspondances finies à homotopie près, qui est un faisceau pour la topologie de Nisnevich. Un exemple central d'un tel faisceau est donné par le préfaisceau $\mathbb{G}_m$ qui à un schéma lisse X associe le groupe des sections globales inversibles sur X. La catégorie des faisceaux homotopiques, notée ici $HI(k)$, a de bonnes propriétés que l'on peut résumer essentiellement en disant que c'est une catégorie abélienne de Grothendieck, monoïdale symétrique fermée.

Un des points centraux de la théorie est la démonstration par Voevodsky que tout faisceau homotopique F admet une *résolution de Gersten* [(1)]. Un cas particulier de ce résultat est le fait que pour tout schéma lisse X, le groupe abélien $F(X)$ admet une résolution par un complexe de la forme :

$$(\mathcal{G}) \qquad C^*(X, \hat{F}_*) : \bigoplus_{x \in X^{(0)}} \hat{F}(\kappa(x)) \to \dots \bigoplus_{x' \in X^{(n)}} \hat{F}_{-n}(\kappa(x')) \to \dots$$

Suivant Voevodsky, $F_{-n} = \underline{\mathrm{Hom}}_{HI(k)}(\mathbb{G}_m^{\otimes n}, F)$. On a noté $X^{(n)}$ l'ensemble des points de codimension n de X. En degré n, ce complexe est formé par la somme des fibres du faisceau F_{-n} en les points du topos Nisnevich définis par $\kappa(x)$, le corps résiduel de x.

Un corollaire de cette résolution de Gersten est que les faisceaux homotopiques sont essentiellement déterminés par leurs fibres en un corps de fonctions. La question centrale de cet article est de savoir jusqu'à quel point ils le sont.

Théorie de Rost. — Pour définir un complexe de Gersten, du type $(\mathcal{G})$, on remarque qu'il faut essentiellement se donner un groupe abélien pour chaque corps résiduel d'un point de X. M. Rost axiomatise cette situation en introduisant les <u>modules de cycles</u>. Un module de cycles est un foncteur ϕ de la catégorie des corps de fonctions au-dessus de k vers les groupes abéliens gradués, muni d'une fonctorialité étendue qui permet de définir un complexe $C^*(X, \phi)$ du type $(\mathcal{G})$. Pour avoir une idée de cette fonctorialité, le lecteur peut se référer aux propriétés de la K-théorie de Milnor – mais aussi à la théorie des modules galoisiens. Rost note l'analogie entre ce complexe et le groupe des cycles de X – comme l'avaient fait Bloch et Quillen avant lui – et utilise le traitement de la théorie de l'intersection par Fulton pour montrer que la *cohomologie* du complexe, notée $A^*(X, \phi)$, est naturelle en X par rapport aux morphismes de schémas lisses.

Une comparaison. — Répondant à la question finale du premier paragraphe, nous comparons la théorie de Rost et celle de Voevodsky. D'une manière vague, notre résultat principal affirme que l'association $F \mapsto \hat{F}_*$ définit un foncteur pleinement fidèle des faisceaux homotopiques dans les modules de cycles, avec pour quasi-inverse à gauche le foncteur $\phi \mapsto A^0(., \phi)$.

Pour être plus précis dans la formulation de ce résultat, on est conduit à élargir la catégorie des faisceaux homotopiques. On définit un <u>module homotopique</u> F_* comme un faisceau homotopique $\mathbb{Z}$-gradué muni d'isomorphismes $\epsilon_n : F_n \to (F_{n+1})_{-1}$. La

1. Les complexes du type $(\mathcal{G})$, ci-dessous, ont été introduits par Grothendieck sous le nom *résolution de Cousin*, remplaçant la théorie des faisceaux homotopiques par celle des faisceaux cohérents. Grâce à la suite spectrale associée à la filtration par coniveau d'après Grothendieck, ils ont été réintroduits un peu plus tard dans le contexte des théories cohomologiques, par Brown et Gersten en K-théorie et finallement par Bloch et Ogus dans une version axiomatique. Notons que ces derniers auteurs parlent plutôt de ≪ *arithmetic resolution* ≫ et il semble que le terme de *résolution de Gersten* se soit imposé par la suite. La fonctorialité de la résolution de Gersten par rapport à un morphisme de schémas lisses a été traitée dans le cas de la K-théorie par H. Gillet (voir [**Gil85**]) puis étendue dans le cas des modules de cycles par M. Rost.

catégorie obtenue, notée $HI_*(k)$, est encore abélienne de Grothendieck, symétrique monoïdale fermée. De plus, elle contient comme sous-catégorie pleine la catégorie $HI(k)$ – si F est un faisceau homotopique, le module homotopique associé a pour valeur $\mathbb{G}_m^{\otimes n} \otimes F$ (resp. F_{-n}) en degré $n \geq 0$ (resp. $n < 0$).

Dès lors, on peut montrer que le système $\hat{F}_*$ des fibres d'un module homotopique F_* en un corps de fonctions définit un module de cycles. De plus, pour tout module de cycles ϕ, le groupe $A^0(X, \phi)$, dépendant fonctoriellement d'un schéma lisse X, définit un module homotopique.

***Théorème* (*cf.* 3.4).** — *Les deux associations décrites ci-dessus définissent des foncteurs quasi-inverses l'un de l'autre.*

La résolution de Gersten obtenue par Voevodsky est maintenant équivalente au résultat suivant :

***Corollaire* (*cf.* 3.6).** — *Si F_* est un module homotopique et X un schéma lisse, $H^n(X, F_*) = A^n(X, \hat{F}_*)$.* [(2)]

L'interprétation motivique. — Rappelons qu'un complexe motivique est un complexe [(3)] de faisceaux Nisnevich avec transferts dont les faisceaux de cohomologie sont des faisceaux homotopiques. La catégorie des complexes motiviques $DM^{eff}(k)$ porte ainsi naturellement une t-structure au sens de Beilinson, Bernstein et Deligne dont le coeur est la catégorie $HI(k)$.

La catégorie $DM^{eff}(k)$ est triangulée monoïdale symétrique fermée. Elle contient comme sous catégorie pleine la catégorie des motifs purs modulo équivalence rationnelle définie par Grothendieck. C'est ainsi une catégorie « effective », dans le sens où le motif de Tate $\mathbb{1}(1)$ n'a pas de $\otimes$-inverse. Suivant l'approche initiale de Grothendieck, on est conduit à introduire une version non effective des complexes motiviques ; c'est ce qui est fait par D.C. Cisinski et l'auteur dans [**CD09b**]. Il est naturel dans le contexte des complexes motiviques de remplacer la construction habituelle pour inverser $\mathbb{1}(1)$ par l'approche des topologues pour définir la catégorie homotopique stable $\mathscr{SH}_{top}$. La catégorie $DM(k)$, dont les objets seront appelés les spectres motiviques, est ainsi construite à partir du formalisme des spectres et des catégories de modèles. C'est la catégorie monoïdale homotopique [(4)] *universelle* munie d'un foncteur dérivé monoïdal

$$\Sigma^\infty : DM^{eff}(k) \to DM(k)$$

admettant un adjoint à droite Ω^∞ et telle que l'objet $\Sigma^\infty \mathbb{1}(1)$ est $\otimes$-inversible. Notons que dans le cadre des complexes motiviques, le foncteur Σ^∞ est pleinement fidèle d'après le théorème de simplification de Voevodsky [**Voe02**].

2. L'identification obtenue ici est naturelle, non seulement par rapport au pullback, mais aussi par rapport aux correspondances finies et par rapport au pushout par un morphisme projectif.

3. Originellement, ces complexes sont supposés bornés supérieurement. Nous abandonnons cette hypothèse dans tout l'article suivant [**CD09b**].

4. c'est-à-dire la catégorie homotopique associée à une catégorie de modèles monoïdale.

Dans cet article, nous montrons que l'on peut étendre la définition de la t-structure homotopique à la catégorie $DM(k)$, de telle manière que le foncteur Ω^∞ est t-exact. Le coeur de la t-structure homotopique sur $DM(k)$ est la catégorie $HI_*(k)$ des modules homotopiques, qui est donc canoniquement identifiée à la catégorie des modules de cycles d'après le théorème 3.4 déjà cité.

Ceci nous permet de donner une interprétation frappante du module de cycles $\hat{F}_*$ associé à un module homotopique F_*, à travers la notion de motifs génériques de [**Dég08b**].[5] Le motif générique associé à un corps de fonctions E est le pro-motif défini par tous les modèles lisses de E. On considère la catégorie $DM^{(0)}_{gm}(k)$ formée par tous les twists de motifs génériques par $\mathbb{1}(n)[n] = \mathbb{1}\{n\}$ pour $n \in \mathbb{Z}$. Alors, $\hat{F}_*$ est simplement la restriction du foncteur représenté par F_* dans $DM(k)$ à la catégorie $DM^{(0)}_{gm}(k)$. La catégorie $DM^{(0)}_{gm}(k)$ est une catégorie de « points » pour les spectres motiviques, et la fonctorialité des modules de cycles est interprétée en termes de *morphismes de spécialisations* entre ces points. De ce point de vue, les modules homotopiques correspondent à des systèmes locaux où le groupoïde fondamental est remplacé par la catégorie $DM^{(0)}_{gm}(k)$.

Filtration par coniveau. — Comme on l'a déjà mentionné, la filtration par coniveau d'un schéma lisse X est liée à la résolution de Gersten : elle induit pour tout module homotopique F_* une suite spectrale convergente

$$E^{p,q}_{1,c}(X, F_*) \Rightarrow H^{p+q}(X, F_*)$$

dont le premier terme est concentré sur la ligne $q = 0$ et s'identifie *canoniquement* au complexe $C^*(X, \hat{F}_*)$. Sa dégénérescence explique donc le corollaire 3.6.

Ce résultat peut être étendu aux spectres motiviques. Pour un schéma lisse X et un spectre motivique $\mathbb{E}$, on note $H^p(X, \mathbb{E})$ le groupe des morphismes dans $DM(k)$ entre le motif de X et $E[p]$. On note aussi $\underline{\mathrm{H}}^q_*(\mathbb{E})$ (resp. $\hat{\underline{\mathrm{H}}}^q_*(\mathbb{E})$) le module homotopique (resp. module de cycles) correspondant au q-ième groupe de cohomologie pour la t-structure homotopique. La filtration par coniveau sur X induit une suite spectrale

$$E^{p,q}_{1,c} = C^p(X, \hat{\underline{\mathrm{H}}}^q_*(\mathbb{E}))_0 \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{E}).$$

Par ailleurs, la filtration sur $\mathbb{E}$ pour la t-structure homotopique détermine une suite spectrale

$$E^{p,q}_{2,t} = H^p(X, \underline{\mathrm{H}}^q_*(\mathbb{E}))_0 \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{E}).$$

Théorème (cf. 6.4). — *L'identification du corollaire 3.6 détermine un isomorphisme canonique de suites spectrales*

$$E^{p,q}_{r,c} = E^{p,q}_{r,t}, \ r \geq 2.$$

On en déduit que la filtration par coniveau relativement à X sur $H^*(X, \mathbb{E})$ coïncide avec la filtration pour la t-structure homotopique relativement à $\mathbb{E}$. On en déduit aussi que la suite spectrale du coniveau satisfait de bonnes propriétés de fonctorialité par

5. Cette notion a aussi été introduite par A.Beilinson dans [**Bei02**].

rapport au schéma lisse X : compatibilité aux pullbacks, pushouts, transferts et à l'action de la cohomologie motivique (*cf.* 6.5 pour plus de précisions).

Ce résultat doit être comparé à un théorème de Bloch et Ogus montrant que la suite spectrale du coniveau sur la cohomologie de De Rham coincide avec la suite spectrale d'hypercohomologie Zariski du complexe de De Rham (*cf.* [**BO74**]). Plus précisément, on retrouve ce théorème grâce à la notion de *théorie de Weil mixte* introduite par Cisinski et l'auteur dans [**CD09a**]. Toute théorie de Weil mixte correspond en effet à un spectre motivique $\mathbb{E}$ auquel on peut appliquer le théorème précédent, et la cohomologie de De Rham en caractéristique 0 est un cas particulier de théorie de Weil mixte. Pour retrouver le résultat sur la cohomologie de De Rham, il faut préciser que le module homotopique $\underline{\mathrm{H}}^q_*(\mathbb{E})$ coincide en degré 0 avec la *cohomologie non ramifiée* (6) associée à $\mathbb{E}$, à savoir le faisceau Zariski associé au préfaisceau $X \mapsto H^q(X, \mathbb{E})$. De ce point de vue, les résultats de cet article apparaissent dans le prolongement direct des travaux de Bloch et Ogus ; la notion de module homotopique exprime ainsi la *structure* des faisceaux de cohomologie non ramifiée.

Plan du travail. — L'article est divisé en trois parties.

Dans la première partie, on introduit la catégorie des modules homotopiques (def. 1.15) après quelques rappels sur les faisceaux homotopiques. On rappelle aussi les grandes lignes de la théorie des modules de cycles et on établit le théorème central 3.4 cité précédemment en s'appuyant sur les articles [**Dég06**] et [**Dég08b**] pour construire chaque foncteur de l'équivalence de catégories. On notera que tout le sel de ce théorème réside dans l'étude de la fonctorialité de la résolution de Gersten. C'est ce qu'on exploite notamment en étudiant l'identification de 3.6 à la fin de cette partie.

Dans la seconde partie, on rappelle la théorie des complexes motiviques de Voevodsky en utilisant le travail effectué dans [**CD09b**] sur les catégories de modèles. Grâce à cela, on peut introduire la catégorie $DM(k)$ aisément et donner la définition de la t-structure homotopique sur cette catégorie, ainsi que l'identification du coeur. La fin de cette seconde partie est consacrée à la comparaison 6.4 des suites spectrales du coniveau et de la t-structure homotopique, qui s'appuie de manière essentielle sur l'étude de la suite spectrale du coniveau déjà effectuée dans [**Dég08a**]. On exploite ici la notion de ≪ filtration décalée ≫ introduite par Deligne, sur le modèle de [**Par96**]. Dans un assez long préliminaire 6.1, nous avons essayé de clarifier les diverses constructions des suites spectrales qui interviennent, l'une par un couple exact et l'autre par un complexe filtré. C'est l'*axiome de l'octaèdre* qui apparaît central ici et qui explique de manière frappante la dualité entre ces deux approches.

La troisième partie est consacrée à diverses applications et compléments. Le premier de ceux-ci illustre la remarque déjà faite sur l'importance de l'étude de la fonctorialité de la résolution de Gersten : elle nous permet de montrer que le morphisme de Gysin (*cf.* [**Dég08a**]) et la transposée d'un morphisme fini coïncident dans la

6. Ce type de faisceau a été introduit pour la première fois dans [**BO74**] mais la terminologie utilisée ici est apparue un peu plus tard.

catégorie *DM*(k). La deuxième application montre que pour une large classe de modules de cycles, la graduation structurale est bornée inférieurement. Cette classe est déterminée par une notion de constructibilité sur les modules homotopiques introduite à cette occasion, et comparée à d'autres définitions. On montre ensuite en quoi la théorie des groupes de Chow à coefficients dans un module de cycle est particulièrement intéressante dans le cas des schémas singuliers, en les identifiant (dans les cas où on peut) avec l'homologie de Borel-Moore du module homotopique correspondant [(7)]. On termine l'article sur une comparaison entre les motifs génériques et les motifs birationnels introduits par B. Kahn et R. Sujatha (*cf.* [**KS02**]) qui permet de compléter la fonctorialité des motifs génériques.

Perspective. — Comme on l'a déjà remarqué, la catégorie *DM*(k) est analogue à la catégorie homotopique stable topologique. C'est dans le cadre de la catégorie homotopique stable des schémas que cette analogie prend tout son sens. Ainsi, F. Morel a introduit et largement étudié l'analogue des faisceaux homotopiques dans ce cadre (les faisceaux Nisnevich strictement invariants par homotopie, [**Mor05**]). Il a aussi introduit l'analogue des modules homotopiques, interprétés comme objets du coeur de la catégorie homotopique stable des schémas dans [**Mor04**]. Sa notion de module homotopique est plus générale que la nôtre. [(8)] Dans un travail en préparation, nous montrons une conjecture de Morel prédisant que les modules homotopiques introduits ici sont équivalents aux modules homotopiques orientables. Cette conjecture s'inscrit plus généralement dans le tableau actuel qui veut que la catégorie *DM*(k) s'identifie à la catégorie des spectres orientables avec loi de groupe formelle additive – ceci est connu à coefficients rationnels et devrait se généraliser sur une base quelconque (*cf.* [**CD07**]). [(9)]

Le résultat concernant la comparaison de suites spectrales a été considéré indépendemment de nous par M.V. Bondarko dans son travail sur les structures de poids (*cf.* [**Bon08**]). Notons pour terminer que notre démonstration s'appuie sur la *preuve de Deligne* [(10)] et que nous nous sommes particulièrement inspirés de [**GS99**] et [**Par96**].

7. On notera ainsi que dans la définition des différentielles du complexe $C^*(X,\phi)$, on utilise de manière centrale le procédé de normalisation pour désingulariser les sous-schémas fermés de X en codimension 1. Cette résolution (faible) des singularités explique dans une certaine mesure les bonnes propriétés des groupes $A^*(X,\phi)$.

8. On peut résoudre la contradiction entre les deux terminologies en utilisant l'expression ≪ module homotopique avec transferts ≫ pour désigner les objets considérés ici. Une autre possibilité est d'appeller ≪ modules homotopiques généralisés ≫ les objets considérés par Morel, venant de la catégorie homotopique stable.

9. Ceci soulève aussi un problème de terminologie pour différencier les objets de la catégorie *DM*(k) de ceux de la catégorie $SH(k)$. La terminologie de ≪ spectres motiviques ≫ a été employée par plusieurs auteurs – dont malheureusement Voevodsky – pour désigner les objets de $SH(k)$. Il nous semble plus opportun, pour des raisons historiques évidentes, de réserver cette terminologie aux objets de la catégorie *DM*(k) et de parler de ≪ spectres motiviques généralisés ≫ pour désigner les objets de $SH(k)$. Cette terminologie présente l'avantage d'être conforme à celle utilisée en topologie algébrique.

10. Elle est mentionnée par Bloch et Ogus dans [**BO74**] mais n'a pas été rédigée par Deligne.

Remerciements. — Mes remerciements vont en premier lieu à F. Morel qui a dirigé ma thèse, dans laquelle le résultat central de cet article a été établit. L'influence de ses idées est partout dans ce texte. Je remercie aussi A. Suslin et A. Merkurjev qui ont été les rapporteurs de cette thèse et dont les rapports m'ont beaucoup aidés dans la rédaction présente, ainsi que D.C. Cisinski pour sa relecture et son intérêt pour mon mémoire de thèse. Enfin, je remercie J. Ayoub, A. Beilinson, J.B. Bost, B. Kahn, J. Riou, C. Soulé et J. Wildeshaus pour leur intérêt et des discussions autour du sujet de cet article.

Notations. — On fixe un corps parfait k. Tous les schémas considérés sont des k-schémas séparés. Nous dirons qu'un schéma X est lisse si il est lisse de type fini sur k. La catégorie des schémas lisses est notée $\mathscr{L}_k$.

Nous disons qu'un schéma X est *essentiellement de type fini* s'il est localement isomorphe au spectre d'une k-algèbre qui est une localisation d'une k-algèbre de type fini.

On appelle *corps de fonctions* toute extension de corps E/k de degré de transcendance fini. Un *corps de fonctions valué* est un couple (E, v) où E est un corps de fonctions et v est une valuation sur E dont l'anneau des entiers est essentiellement de type fini sur k.

Un *modèle* de E/k est un k-schéma lisse connexe X muni d'un k-isomorphisme entre son corps des fonctions et E. On définit le pro-schéma des modèles de E :

$$(E) = \text{"}\varprojlim_{A \subset E}\text{"}\ \operatorname{Spec}(A)$$

où A parcourt l'ensemble ordonné filtrant des sous-k-algèbres de type fini de E dont le corps des fractions est E.

Voici une liste des catégories principales utilisées dans ce texte :

- $DM_{gm}^{eff}(k)$ (resp. $DM_{gm}(k)$) désigne la catégorie des motifs géométriques effectifs (resp. non nécessairement effectifs).
- $DM^{eff}(k)$ désigne la catégorie des complexes motiviques (que l'on ne suppose pas nécessairement bornés inférieurement).
- $DM(k)$ désigne la catégorie des spectres motiviques, version non effective de $DM^{eff}(k)$.
- $HI(k)$ (resp. $HI_*(k)$) désigne la catégorie des faisceaux (resp. modules) homotopiques. C'est le coeur de la t-structure homotopique sur $DM^{eff}(k)$ (resp. $DM(k)$).
- $\mathscr{M}Cycl(k)$ désigne la catégorie des modules de cycles.

PARTIE I
MODULES HOMOTOPIQUES ET MODULES DE CYCLES

1. Modules homotopiques

1.1. Rappels sur les faisceaux avec transferts. —

1.1. — Soient X et Y des schémas lisses. Rappelons qu'une *correspondance finie* de X vers Y est un cycle de $X \times Y$ dont le support est fini équidimensionel sur X. La formule habituelle permet de définir un produit de composition pour les correspondances finies qui donne lieu à une catégorie additive $\mathscr{L}_k^{cor}$ (*cf.* [**Dég07**, 4.1.19]). On obtient un foncteur $\gamma : \mathscr{L}_k \to \mathscr{L}_k^{cor}$, égal à l'identité sur les objets, en associant à tout morphisme le cycle associé à son graphe. La catégorie $\mathscr{L}_k^{cor}$ est enfin monoïdale symétrique. Le produit tensoriel sur les objets est donné par le produit cartésien des schémas lisses ; sur les morphismes, il est induit par le produit extérieur des cycles (*cf.* [**Dég07**, 4.1.23]).

1.2. — Un *faisceau avec transferts* est un foncteur $F : (\mathscr{L}_k^{cor})^{op} \to \mathscr{A}b$ additif contravariant tel que $F \circ \gamma$ est un faisceau Nisnevich. On note $Sh^{tr}(k)$ la catégorie des faisceaux avec transferts munis des transformations naturelles. Cette catégorie est abélienne de Grothendieck (*cf.* [**Dég07**, 4.2.8]). Une famille génératrice est donnée par les faisceaux représentables par un schéma lisse X :

$$\mathbb{Z}^{tr}(X) : Y \mapsto c(Y, X).$$

Il existe un unique produit tensoriel symétrique $\otimes^{\mathrm{tr}}$ sur $Sh^{tr}(k)$ telle que le foncteur $\mathbb{Z}^{tr}$ est monoïdal symétrique. La catégorie $Sh^{tr}(k)$ est de plus monoïdale symétrique fermée (*cf.* [**Dég07**, 4.2.14]).

Définition 1.3. — Un *faisceau homotopique* est un faisceau avec transferts F invariant par homotopie : pour tout schéma lisse X, le morphisme induit par la projection canonique $F(X) \to F(\mathbb{A}^1_X)$ est un isomorphisme.

On note $HI(k)$ la sous-catégorie pleine de $Sh^{tr}(k)$ formée des faisceaux homotopiques. Le foncteur d'oubli évident $\mathcal{O} : HI(k) \to Sh^{tr}(k)$ admet un adjoint à gauche $h_0 : Sh^{tr}(k) \to HI(k)$, $h_0(F)$ étant défini comme le faisceau associé au préfaisceau

$$X \mapsto \mathrm{coKer}\left(F(\mathbb{A}^1_X) \xrightarrow{s_0^* - s_1^*} F(X)\right) \tag{1.3.a}$$

avec s_0 (resp. s_1) la section nulle (resp. unité) de $\mathbb{A}^1_X/X$ (*cf.* [**Dég07**, 4.4.4, 4.4.15]). D'après *loc. cit.*, le foncteur $\mathcal{O}$ est exact. La catégorie $HI(k)$ est donc une sous-catégorie épaisse de $Sh^{tr}(k)$. En particulier, c'est une catégorie abélienne de Grothendieck dont une famille génératrice est donnée par les faisceaux de la forme $h_0(X) := h_0(\mathbb{Z}^{tr}(X))$. On vérifie aisément que le foncteur $\mathcal{O}$ commute de plus à toutes les limites projectives ce qui implique que $HI(k)$ admet des limites projectives.

1.4. — Pour un corps de fonctions E, on définit la fibre de F en E comme la limite inductive de l'application de F au pro-schéma (E) :

$$\hat{F}(E) = \varinjlim_{A \subset E} F(\mathrm{Spec}(A))$$

Les foncteurs $F \mapsto \hat{F}(E)$ forment une famille conservative de foncteurs fibres [11] de $HI(k)$ (*cf.* [**Dég07**, 4.4.7]).

Remarque 1.5. — Ce dernier résultat repose sur la propriété très intéressante des faisceaux homotopiques suivante :

Proposition 1.6. — *Pour toute immersion ouverte dense $j : U \to X$ dans un schéma lisse, le morphisme induit*

$$j_* : h_0(U) \to h_0(X)$$

est un épimorphisme dans $HI(k)$.

Cette proposition est une conséquence du corollaire 4.3.22 de [**Dég07**] : il existe un recouvrement ouvert $W \xrightarrow{\pi} X$ et une correspondance finie $\alpha : W \to U$ telle que le diagramme suivant est commutatif à homotopie près

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\pi"] \\ U \arrow[r, "j"] & X. \end{tikzcd}$$

Elle implique en particulier que pour tout schéma lisse connexe X de corps des fontions E, le morphisme canonique $F(X) \to \hat{F}(E)$ est un monomorphisme.

1.7. — Dans une catégorie abélienne de Grothendieck $\mathscr{A}$, une classe de flèches $\mathcal{W}$ est dite localisante si :

(i) $\mathcal{W}$ est stable par limite inductive.

(ii) Soit f et g des flèches composables de $\mathscr{A}$. Si deux des constituants de (f, g, gf) appartiennent à $\mathcal{W}$, le troisième appartient à $\mathcal{W}$.

Si $\mathcal{S}$ est un classe de flèche essentiellement petite, on peut parler de la classe de flèches localisante engendrée par $\mathcal{S}$.

Lemme 1.8. — *Il existe un unique produit tensoriel symétrique $\otimes^{\mathrm{Htr}}$ sur $HI(k)$ tel que le fonteur h_0 est monoïdal symétrique.*

Démonstration. — D'après ce qui précède, $HI(k)$ s'identifie à la localisation de la catégorie $Sh^{tr}(k)$ par rapport à la classe de flèches localisante engendrée par les morphismes $\mathbb{Z}^{tr}(\mathbb{A}^1_X) \to \mathbb{Z}^{tr}(X)$ pour un schéma lisse X arbitraire. Ainsi, pour tout schéma lisse X, $\mathcal{W} \otimes^{\mathrm{tr}} \mathbb{Z}^{tr}(X) \subset \mathcal{W}$. Donc le produit tensoriel $\otimes^{\mathrm{tr}}$ satisfait la propriété de localisation par rapport à $\mathcal{W}$ ce qui démontre le lemme. □

11. *i.e.* exacts commutant aux limites inductives.

La catégorie $HI(k)$ munie du produit tensoriel $\otimes^{\mathrm{Htr}}$ obtenu dans le lemme précédent est monoïdale symétrique fermée. Ce produit tensoriel est caractérisé par la relation $h_0(X) \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(Y) = h_0(X \times Y)$ déduite du lemme précédent.

Définition 1.9. — Soit $s : \{1\} \to \mathbb{G}_m$ l'immersion du point unité. On appelle *sphère de Tate* le conoyau de $h_0(s)$ dans la catégorie $HI(k)$. On la note S^1_t.

D'après l'invariance par homotopie, on obtient encore une suite exacte courte scindée dans $HI(k)$:

$$0 \to S^1_t \to h_0(\mathbb{G}_m) \xrightarrow{j_*} h_0(\mathbb{A}^1_k) \to 0.$$

où j est l'immersion ouverte évidente. D'après la proposition 2.2.4 de [**Dég08b**], la sphère de Tate est isomorphe en tant que faisceau au groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ – les transferts induits sur $\mathbb{G}_m$ se calculent à l'aide de l'application norme suivant *loc. cit.*

Lemme 1.10. — *L'automorphisme de permutation des facteurs sur $S^1_t \otimes^{\mathrm{Htr}} S^1_t$ est égal à -1.*

Démonstration. — Ce fait est bien connu du point de vue de la cohomologie motivique. On donne ici une démonstration élémentaire basée sur un argument de Suslin et Voevodsky. Pour tout schéma affine lisse $X = \mathrm{Spec}(A)$, on obtient par définition des épimorphismes :

$$\mathbb{G}_m(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{G}_m(X) \xrightarrow{\alpha} \Gamma(X, h_0(\mathbb{G}_m^2)) \xrightarrow{\beta} \Gamma(X, S^1_t \otimes^{\mathrm{Htr}} S^1_t).$$

On considère le sous-schéma fermé H de $\mathbb{A}^1 \times X \times \mathbb{G}_m = \mathrm{Spec}(A[t, u, u^{-1}])$ définit par l'équation

$$t(u - a)(u - b) + (1 - t)(u - ab)(u - 1) = 0.$$

Il est de codimension 1 et domine $\mathbb{A}^1_X$. C'est donc une correspondance finie de $\mathbb{A}^1_X$ dans $\mathbb{G}_m$. D'après l'équation ci-dessus, $H \circ s_0 = \{ab\} + \{1\}$ et $H \circ s_1 = \{a\} + \{b\}$. Si δ désigne l'immersion diagonale de $\mathbb{G}_m$, l'homotopie $\delta \circ H$ montre donc la relation

$$\alpha(ab, ab) + \alpha(1, 1) = \alpha(a, a) + \alpha(b, b).$$

On en déduit $\beta\alpha(b, a) = -\beta\alpha(a, b)$ ce qui conclut d'après le lemme de Yoneda. □

1.11. — Pour un entier $n \geq 0$, on note S^n_t la puissance tensorielle n-ième de S^1_t dans $HI(k)$. Si F est un faisceau homotopique, on pose $F_{-n} = \underline{\mathrm{Hom}}_{HI(k)}(S^n_t, F)$. Par définition, pour tout schéma lisse X,

$$F_{-1}(X) = F(\mathbb{G}_m \times X)/F(X).$$

Le foncteur $?_{-n}$ est le n-ième itéré du fonteur $?_{-1}$. Ainsi la proposition 3.4.3 de [**Dég08b**] entraine :

Lemme 1.12. — *L'endofoncteur $HI(k) \to HI(k), F \mapsto F_{-n}$ est exact.*

Le résultat suivant est un corollaire du théorème de simplification de Voevodsky [**Voe02**].

Proposition 1.13. — *L'endofoncteur $HI(k) \to HI(k), F \mapsto S_t^n \otimes^{\mathrm{Htr}} F$ est pleinement fidèle.*

Démonstration. — Il suffit de considérer le cas $n = 1$. La preuve anticipe la suite de l'exposé puisqu'elle utilise la catégorie $DM_-^{eff}(k)$ des complexes motiviques de Voevodsky définie dans [**Voe02**]. Le théorème central de *loc. cit.* affirme que le twist de Tate est pleinement fidèle dans $DM_-^{eff}(k)$. Il en résulte que le morphisme canonique $F \to \underline{\mathrm{Hom}}_{DM_-^{eff}(k)}(\mathbb{Z}^{tr}(1)[1], F(1)[1])$ est un isomorphisme. D'après [**Dég08b**, 3.4.4], le membre de droite est égal à $\underline{\mathrm{H}}^0(F(1)[1])_{-1}$. Or par définition, $\underline{\mathrm{H}}^0(F(1)[1]) = S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} F$ et la transformation naturelle correspondante $F \to (S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} F)_{-1}$ est l'application d'adjonction. □

1.2. Définition. —

1.14. — On note $\mathbb{Z}{-}HI(k)$ la catégorie des faisceaux homotopiques $\mathbb{Z}$-gradués. Pour un tel faisceau F_* et un entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $F_*\{n\}$ le faisceau gradué dont la composante en degré i est F_{i+n}. Si F est un faisceau homotopique, on note encore $F\{n\}$ le faisceau gradué concentré en degré $-n$ égal à F. La catégorie $\mathbb{Z}{-}HI(k)$ est abélienne de Grothendieck avec pour générateurs la famille $(h_0(X)\{i\})$ indexée par les schémas lisses X et les entiers $i \in \mathbb{Z}$.

Cette catégorie est monoïdale symétrique :

$$\left(F_* \hat{\otimes}^{\mathrm{Htr}} G_*\right)_n = \oplus_{p+q=n} F_p \otimes^{\mathrm{Htr}} G_q.$$

Pour la symétrie, on adopte la convention donnée par la règle de Koszul :

$$\oplus_{p+q=n} F_p \otimes^{\mathrm{Htr}} G_q \xrightarrow{\sum(-1)^{pq}.\epsilon_{pq}} \oplus_{p+q=n} G_q \otimes^{\mathrm{Htr}} F_p$$

où ϵ_{pq} désigne l'isomorphisme de symétrie pour la structure monoïdale des faisceaux homotopiques.

On note S_t^* le faisceau homotopique gradué concentré en degré positif, égal en degré n à S_t^n. Compte tenu de la règle de Koszul ci-dessus et du lemme 1.10, c'est un monoïde commutatif dans $\mathbb{Z}{-}HI(k)$. On note $S_t^*{-}\mathrm{mod}$ la catégorie des modules sur S_t^*. C'est une catégorie abélienne monoïdale de Grothendieck avec pour générateurs $(S_t^* \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(X)\{i\})$ pour X un schéma lisse et $i \in \mathbb{Z}$. Le morphisme structural d'un S_t^*-module (F_*, τ) est déterminé par la suite de morphismes $S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} F_n \xrightarrow{\tau_n} F_{n+1}$, appelés *morphismes de suspension.*

Définition 1.15. — Un *module homotopique* est un S_t^*-module (F_*, τ) tel que le morphisme adjoint à τ_n

$$\epsilon_n : F_n \to \underline{\mathrm{Hom}}_{HI(k)}(S_t^1, F_{n+1}) = (F_{n+1})_{-1}$$

est un isomorphisme. On note $HI_*(k)$ la sous-catégorie de S_t^*–mod formée des modules homotopiques.

1.16. — Compte tenu du lemme 1.12, le foncteur d'inclusion $HI_*(k) \to S_t^*-$mod est exact et conservatif. Il admet de plus un adjoint à gauche L définit pour tout faisceau homotopique F par la formule

$$L\big(S_t^* \otimes^{\mathrm{Htr}} F\{i\}\big)_n = \begin{cases} S_t^{n+i} \otimes^{\mathrm{Htr}} F & \text{si } n+i \geq 0 \\ F_{n+i} & \text{si } n+i \leq 0 \end{cases}$$

en adoptant la notation de 1.11. Le fait que L prend ses valeurs dans les faisceaux homotopiques résulte de 1.13. On pose plus simplement $\sigma^\infty F\{i\} = L\big(S_t^* \otimes^{\mathrm{Htr}} F\{i\}\big)$. La catégorie $HI_*(k)$ est donc une sous-catégorie abélienne de $S_t^* -$mod, avec pour générateurs la famille

(1.16.a) $$h_{0,*} = \sigma^\infty h_0(X)\{i\}$$

pour un schéma lisse X et un entier $i \in \mathbb{Z}$ – le symbole $*$ correspond à la graduation naturelle de module homotopique.

Si (F_*, τ) est un module homotopique, on pose $\omega^\infty F_* = F_0$. On obtient ainsi un couple de foncteurs adjoints

$$\sigma^\infty : HI(k) \leftrightarrows HI_*(k) : \omega^\infty$$

tels que σ^∞ est pleinement fidèle (prop. 1.13) et ω^∞ est exact (lemme 1.12). Ainsi, pour tout schéma lisse X, tout module homotopique F_* et tout $(n,i) \in \mathbb{Z}^2$,

(1.16.b) $$\mathrm{Hom}_{HI_*(k)}(h_{0,*}(X), F_*\{i\}[n]) = H^n_{\mathrm{Nis}}(X; F_i).$$

Lemme 1.17. — *Il existe sur $HI_*(k)$ une unique structure monoïdale symétrique telle que le foncteur L est monoïdal symétrique.*

Démonstration. — Compte tenu de ce qui précède, le foncteur L est un foncteur de localisation : pour tout schéma lisse X et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on obtient par définition $(S_t^* \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(X)\{n\})_{-n+1} = S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(X)$. Par adjonction, l'identité de $S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(X)$ induit donc un morphisme de S_t^*-modules

$$S_t^* \otimes^{\mathrm{Htr}}(S_t^1 \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(X)\{n-1\}) \to S_t^* \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(X)\{n\}.$$

Utilisant à nouveau le jeu des adjonctions introduites ci-dessus, $HI_*(k)$ est la localisation de S_t^*-mod par rapport à la classe de flèches localisante $\mathcal{W}$ (*cf.* 1.7) engendrée par les morphismes précédents. Pour tout couple (Y,m), Y schéma lisse, $m \in \mathbb{Z}$, il est évident que $\mathcal{W} \,\hat{\otimes}^{\mathrm{Htr}}(S_t^* \otimes^{\mathrm{Htr}} h_0(Y)\{m\}) \subset \mathcal{W}$. Ainsi, $\hat{\otimes}^{\mathrm{Htr}}$ vérifie la propriété de localisation par rapport à $\mathcal{W}$ ce qui conclut. □

La catégorie $HI_*(k)$ est donc monoïdale symétrique fermée avec pour neutre le module homotopique S_t^*. Le foncteur σ^∞ est de plus monoïdal symétrique. Enfin, l'objet $\sigma^\infty S_t^1$ est inversible pour le produit tensoriel avec pour inverse $\sigma^\infty \mathbb{Z}^{tr}\{-1\}$.

Remarque 1.18. — La catégorie $HI_*(k)$ est la catégorie monoïdale abélienne de Grothendieck *universelle* pour les propriétés qui viennent d'être énoncées. La construction donnée ici est parfaitement analogue à la construction de la catégorie des spectres en topologie algébrique, comme le suggère nos notations – en particulier pour le faisceau S_t^1 qui joue le rôle de la sphère topologique. La construction ici est facilitée parce que nous sommes dans un cadre abélien et que la sphère S^1_t est anti-commutative. Le théorème de simplification 1.13 rend la construction du foncteur L plus facile mais n'est pas indispensable.

1.3. Réalisation des motifs géométriques. — Rappelons que la catégorie des motifs géométriques effectifs $DM_{gm}^{eff}(k)$ définie par Voevodsky est l'enveloppe pseudo-abélienne de la localisation de la catégorie $K^b(\mathscr{L}_k^{cor})$ des complexes de $\mathscr{L}_k^{cor}$ à équivalence d'homotopie près par la sous-catégorie triangulée épaisse engendrée par les complexes suivants :

1. $\ldots 0 \to U \cap V \to U \oplus V \to X \to 0 \ldots$
   pour un recouvrement ouvert $U \cup V$ d'un schéma lisse X.
2. $\ldots 0 \to \mathbb{A}^1_X \to X \to 0 \ldots$
   induit par la projection canonique pour un schéma lisse X.

Rappelons que cette catégorie est triangulée monoïdale symétrique. Pour un schéma lisse X, on note simplement $M(X)$ le complexe concentré en degré 0 égal à X vu dans $DM_{gm}^{eff}(k)$.

Pour tout complexe borné C de $\mathscr{L}_k^{cor}$, on note $\mathbb{Z}^{tr}(C)$ le complexe de faisceau avec transferts évident. Pour un faisceau homotopique F, posons $\varphi_F(C) = \mathrm{Hom}_{D(Sh^{tr}(k))}(\mathbb{Z}^{tr}(C), F)$. Rappelons que pour un schéma lisse X, $\mathrm{Hom}_{D(Sh^{tr}(k))}(\mathbb{Z}^{tr}(X)[-n], F) = H^n_{\mathrm{Nis}}(X; F)$ (*cf.* [**Dég07**, 4.2.9]) ; la cohomologie Nisnevich de F est de plus invariante par homotopie (*cf.* [**Dég07**, 4.5.1]). On en déduit que le foncteur φ_F ainsi défini se factorise et induit un foncteur cohomologique encore noté $\varphi_F : DM_{gm}^{eff}(k)^{op} \to \mathscr{A}b$.

On définit le motif de Tate *suspendu*[12] $\mathbb{Z}\{1\}$ comme le complexe

$$\ldots \to \mathrm{Spec}(k) \to \mathbb{G}_m \to 0 \ldots$$

où $\mathbb{G}_m$ est placé en degré 0, vu dans $DM_{gm}^{eff}(k)$. Avec une convention légèrement différente de celle de Voevodsky, adpatée à nos besoins, on définit la catégorie des motifs géométriques $DM_{gm}(k)$ comme la catégorie monoïdale symétrique universelle obtenue en inversant $\mathbb{Z}\{1\}$ pour le produit tensoriel. Un objet de $DM_{gm}(k)$ est un couple (C, n) où C est un complexe de $\mathscr{L}_k^{cor}$ et n un entier, noté suggestivement $C\{n\}$. Les morphismes sont définis par la formule

$$\mathrm{Hom}_{DM_{gm}(k)}(C\{n\}, D\{m\}) = \varinjlim_{r \geq -n, -m} \mathrm{Hom}\, DM_{gm}^{eff}(k)(C\{r+n\}, D\{r+n\}).$$

Cette catégorie est de manière évidente équivalente à la catégorie définie dans [**Voe00b**] obtenue en inversant le motif de Tate $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{Z}\{1\}[-1]$. Elle est donc triangulée monoïdale symétrique.

Considérons maintenant un faisceau homotopique (F_*, ϵ_*). Pour tout motif géométrique $C\{n\}$, on pose

$$\varphi(C\{n\}) = \varinjlim_{r \geq -n} \mathrm{Hom}_{D(Sh^{tr}(k))}(\mathbb{Z}^{tr}(C)\{r+n\}, F_r)$$

12. En effet, $\mathbb{Z}\{1\} = \mathbb{Z}(1)[1]$.

où les morphismes de transitions sont

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{D(Sh^{tr}(k))}(\mathbb{Z}^{tr}(C)\{r+n\}, F_r) &\xrightarrow{\epsilon_{r*}} \mathrm{Hom}_{D(Sh^{tr}(k))}(\mathbb{Z}^{tr}(C)\{r+n\}, (F_{r+1})_{-1}) \\ &= \mathrm{Hom}_{D(Sh^{tr}(k))}(\mathbb{Z}^{tr}(C)\{r+n+1\}, F_{r+1}).\end{aligned}$$

Comme dans le cas des motifs effectifs, ceci induit un foncteur de *réalisation cohomologique* associé à (F_*, ϵ_*) :

$$\varphi : DM_{gm}(k)^{op} \to \mathscr{A}b$$

Notons que ce foncteur est naturellement gradué $\varphi_n(\mathbb{Z}^{tr}(C)\{r\}) = \varphi(\mathbb{Z}^{tr}(C)\{r-n\})$ de sorte que, d'après le théorème de simplification 1.13, pour tout schéma lisse X, $\varphi_n(\mathbb{Z}^{tr}(X)) = F_n(X)$

Remarque 1.19. — Ce foncteur obtiendra une interprétation plus naturelle dans la partie II. Notons qu'il résulte du théorème de simplification 1.13 que $\varphi(M(X)\{n\}) = F_{-n}(X)$.

2. Modules de cycles

2.1. Rappels. — Rappelons brièvement la théorie des modules de cycles sur k due à M. Rost. Tous ces rappels concernent la théorie telle qu'elle est exposée dans [**Ros96**]. Toutefois, nous nous référons à [**Dég06**] pour des rappels plus détaillés car nous aurons à utiliser les résultats supplémentaires qui y sont démontrés.

Un *pré-module* de cycles ϕ (*cf.* [**Dég06**, 1.1]) est la donnée pour tout corps de fonctions E d'un groupe abélien $\mathbb{Z}$-gradué $\phi(E)$ satisfaisant à la fonctorialité suivante :

(D1) Pour toute extension de corps $f : E \to L$, on se donne un morphisme appelé *restriction* $f_* : \phi(E) \to \phi(L)$ de degré 0.

(D2) Pour toute extension finie de corps $f : E \to L$, on se donne un morphisme appelé *norme* $f^* : \phi(L) \to \phi(E)$ de degré 0.

(D3) Pour tout élément $\sigma \in K_r^M(E)$ du r-ième groupe de K-théorie de Milnor de E, on se donne un morphisme $\gamma_\sigma : \phi(E) \to \phi(E)$ de degré r.

(D4) Pour tout corps de fonctions valué (E, v), on se donne un morphisme appelé *résidu* $\partial_v : \phi(E) \to \phi(\kappa(v))$ de degré -1.

Considérant ces données, on introduit fréquemment un cinquième type de morphisme, associé à un corps de fonctions valué (E, v) et à une uniformisante π de v, de degré 0, $s_v^\pi = \partial_v \circ \gamma_\pi$, appelé *spécialisation*.

Ces données sont soumises à un ensemble de relations (*cf.* [**Dég06**, par 1.1]). On peut se faire une idée de ces relations en considérant le foncteur de K-théorie de Milnor qui est l'exemple le plus simple de pré-module de cycles.

Considérons un schéma X essentiellement de type fini sur k. Soit x, y deux points de X. Soit Z l'adhérence réduite de x dans X, $\tilde{Z}$ sa normalisation et $f : \tilde{Z} \to Z$ le morphisme canonique. Supposons que y est un point de codimension 1 dans Z et notons $\tilde{Z}_y^{(0)}$ l'ensemble des points génériques de $f^{-1}(y)$. Tout point $z \in \tilde{Z}_y^{(0)}$ correspond alors à une valuation v_z sur $\kappa(x)$ de corps résiduel $\kappa(z)$. On note encore

$\varphi_z : \kappa(y) \to \kappa(z)$ le morphisme induit par f. On définit un morphisme $\partial^x_y : \phi(\kappa(x)) \to \phi(\kappa(y))$ par la formule suivante :

$$\partial^x_y = \begin{cases} \sum_{z \in \tilde{Z}^{(0)}_y} \varphi_z^* \circ \partial_{v_z} & \text{si } y \in Z^{(1)}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons ensuite le groupe abélien :

$$C^p(X;\phi) = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} \phi(\kappa(x)).$$

On dit que le pré-module de cycles ϕ est un *module de cycles* (*cf.* [**Dég06**, 1.3]) si pour tout schéma essentiellement de type fini X,

(FD) Le morphisme

$$d^p_{X,\phi} : \sum_{x \in X^{(p)}, y \in X^{(p+1)}} \partial^x_y : C^p(X;\phi) \to C^{p+1}(X;\phi)$$

est bien définit.

(C) La suite

$$\ldots \to C^p(X;\phi) \xrightarrow{d^p_{X,\phi}} C^{p+1}(X;\phi) \to \ldots$$

est un complexe.

Les modules de cycles forment de manière évidente une catégorie que l'on note $\mathscr{M}Cycl(k)$.

On introduit une graduation sur le complexe de la propriété (C) :

$$C^p(X;\phi)_n = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} M_{n-p}(\kappa(x)).$$

On note $A^p(X;\phi)_n$ le p-ième groupe de cohomologie de ce complexe, appelé parfois *groupe de Chow à coefficients dans* ϕ.

Pour un schéma lisse X de corps des fonctions E, le groupe $A^0(X;\phi)_n$ est donc le noyau de l'application bien définie

$$\phi_n(E) \xrightarrow{\sum_{x \in X^{(1)}} \partial_x} \phi_{n-1}(\kappa(x))$$

où ∂_x désigne le morphisme résidu associé à la valuation sur E correspondant au point x.

2.2. Fonctorialité. —

2.1. — Le complexe gradué $C^*(X;\phi)_*$ est contravariant en X par rapport aux morphismes plats (*cf.* [**Dég06**, par. 1.3]). Il est covariant par rapport aux morphismes propres équidimensionnels (*loc. cit.*).

2.2. — Dans [**Dég06**, 3.18], nous avons prolongé le travail original de Rost et nous avons associé à tout morphisme $f : Y \to X$ localement d'intersection complète ([**Dég06**, 3.12]) tel que Y est lissifiable ([**Dég06**, 3.13]) un *morphisme de Gysin*

$$f^* : C^*(X;\phi) \to C^*(Y;\phi)$$

qui est un composé de morphisme de complexe et d'inverse formel d'un morphisme de complexes qui est un quasi-isomorphisme (plus précisément, il s'agit de l'inverse formel d'un morphisme p^* pour p la projection d'un fibré vectoriel). Pour désigner une telle flèche formelle, on utilise la notation $f^* : X \bullet\!\!\longrightarrow Y$.

Ce morphisme de Gysin f^* satisfait les propriétés suivantes :

1. Lorsque f est de plus plat, f^* coincide avec le pullback plat évoqué plus haut.
2. Si $g : Z \to Y$ est un morphisme localement d'intersection complète avec Z lissifiable, $(fg)^* = g^* f^*$.

Dans le cas où f est une immersion fermée régulière, l'hypothèse que Y est lissifiable est inutile ; le morphisme f^* est défini en utilisant la déformation au cône normal, suivant l'idée originale de Rost (*cf.* [**Dég06**, 3.3]). On utilisera par ailleurs le résultat suivant dû à Rost ([**Ros96**, (12.4)]) qui décrit partiellement ce morphisme de Gysin :

Proposition 2.3. — *Soit X un schéma intègre de corps des fonctions E, et $i : Z \to X$ l'immersion fermée d'un diviseur principal régulier irréductible paramétré par $\pi \in \mathcal{O}_X(X)$. Soit v la valuation de E correspondant au diviseur Z. Alors, le morphisme $i^* : A^0(X;\phi) \to A^0(Z;\phi)$ est la restriction de $s_v^\pi : \phi(E) \to \phi(\kappa(v))$.*

2.4. — A tout carré cartésien

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{j} & X' \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \Delta & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[i]{} & X \end{array}$$

tel que i est une immersion fermée régulière, on associe un *morphisme de Gysin raffiné* $\Delta^* : X' \bullet\!\!\longrightarrow Y'$. Ce morphisme Δ^* vérifie les propriétés suivantes :

1. Si j est régulière et le morphisme des cônes normaux $N_{Y'}(X') \to g^{-1}N_Y(X)$ est un isomorphisme, $\Delta^* = j^*$.
2. Si f est propre, $i^* f_* = g_* \Delta^*$.

De plus, si l'immersion canonique $C_{Y'}(X') \to g^{-1}N_Y(X)$ du cône de j dans le fibré normal de i est de codimension pure égale à e, le morphisme Δ^* est de degré cohomologique e.

2.5. — Pour tout couple de schémas lisses (X, Y) et pour toute correspondance finie $\alpha \in c(X, Y)$, on définit un morphisme $\alpha^* : Y \bullet\!\!\longrightarrow X$ (*cf.* [**Dég06**, 6.9]).

On peut décrire ce dernier comme suit. Supposons que α est la classe d'un sous-schéma fermé irréductible Z de $X \times Y$. Considèrons les morphismes :

$$X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{i} Z \times X \times Y \xrightarrow{q} Y$$

où p et q désignent les projections canoniques et i le graphe de l'immersion fermée $Z \to X \times Y$. Alors,

$$\alpha^* = p_* i^* q^* \tag{2.5.a}$$

où i^* désigne le morphisme de Gysin de l'immersion fermée régulière i, q^* le pullback plat et p_* le pushout fini.

La propriété $(\beta\alpha)^* = \alpha^* \beta^*$ est démontrée dans [**Dég06**, 6.5].

2.3. Suite exacte de localisation. — La suite exacte de localisation n'est pas étudiée (ni rappelée) dans [**Dég06**]. Nous la rappelons maintenant suivant [**Ros96**] et démontrons un résultat supplémentaire concernant sa fonctorialité.
Pour une immersion fermée $i : Z \to X$ purement de codimension c, d'immersion ouverte complémentaire $j : U \to X$, on obtient en utilisant la fonctorialité rappelée ci-dessus une suite exacte courte scindée de complexes

(2.5.b) $$0 \to C^{p-c}(Z;\phi)_{n-c} \xrightarrow{i_*} C^p(X;\phi)_n \xrightarrow{j^*} C^p(U;\phi)_n \to 0.$$

On en déduit une suite exacte longue de localisation
(2.5.c)
$$\ldots \to A^{p-c}(Z;\phi)_{n-c} \xrightarrow{i_*} A^p(X;\phi)_n \xrightarrow{j^*} A^p(U;\phi)_n \xrightarrow{\partial_Z^U} A^{p-c+1}(Z;\phi)_{n-c} \to \ldots$$

où le morphisme ∂_Z^U est définit au niveau des complexes par la formule $\sum_{x\in U^{(p)}, z\in Z^{(p-c+1)}} \partial_z^x$.

Cette suite est naturelle par rapport au pushout propre et au pullback plat. La proposition suivante est nouvelle :

Proposition 2.6. — *Considérons un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\iota'"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & Z \arrow[d, "i"] \\ Y \arrow[r, "\iota"'] & X \end{tikzcd}$$

tel que ι est une immersion fermée régulière. Supposons que i (resp. k) est une immersion fermée d'immersion ouverte complémentaire $j : U \to X$ (resp. $l : V \to X$). Notons $h : V \to U$ le morphisme induit par ι. Supposons enfin que i (resp. k) est de codimension pure égale à c (resp. d). Alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & A^{p-c}(Z;\phi)_{n-c} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\Delta^*"] & A^p(X;\phi)_n \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "\iota^*"] & A^p(U;\phi)_n \arrow[r, "\partial_Z^U"] \arrow[d, "h^*"] & A^{p-c+1}(Z;\phi)_{n-c} \arrow[r] \arrow[d, "\Delta^*"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & A^{p-d}(T;\phi)_{n-d} \arrow[r, "k_*"] & A^p(Y;\phi)_n \arrow[r, "l^*"] & A^p(V;\phi)_n \arrow[r, "\partial_T^V"] & A^{p-d+1}(T;\phi)_{n-d} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

Remarque 2.7. — 1. On peut généraliser la proposition précédente au cas des morphismes de Gysin raffinés comme dans la proposition 4.5 de [**Dég06**]. Nous laissons au lecteur le soin de formuler cette généralisation.

2. Alors que l'hypothèse sur la codimension pure de i est naturelle, celle sur k ne l'est pas, en particulier dans un cas non transverse. Elle ne nous sert qu'à exprimer les degrés cohomologiques de tous les morphismes et peut aisément être supprimée si on accepte des morphismes non homogènes par rapport au degré cohomologique.

Démonstration. — Il suffit de reprendre la preuve de la proposition 4.5 de *loc. cit.* dans le cas du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
T \arrow[rr] \arrow[dr, "k"] \arrow[ddr] & & Z \arrow[dr, "i"] \arrow[ddr] & \\
& Y \arrow[rr] \arrow[d, equal] & & X \arrow[d, equal] \\
& Y \arrow[rr, "\iota"'] & & X.
\end{tikzcd}$$

On obtient ainsi un diagramme commutatif [13], avec les notations analogues de *loc. cit.*

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, "i_*"'] \arrow[dr, phantom, "(1)"] & C_T Z \arrow[r, "\nu'_*"] \arrow[d, "k''_*"] \arrow[dr, phantom, "(2)"] & k^* N_Y X \arrow[d, "k'_*"'] \arrow[dr, phantom, "(3)"] & T \arrow[l, "p_T^*"'] \arrow[d, "k_*"] \\
X \arrow[r, "\sigma"'] \arrow[d, "j^*"'] \arrow[dr, phantom, "(1')"] & N_Y X \arrow[r, equal] \arrow[d, "l'^*"] \arrow[dr, phantom, "(2')"] & N_Y X \arrow[d, "l'^*"'] \arrow[dr, phantom, "(3')"] & Y \arrow[l, "p^*"'] \arrow[d, "l^*"] \\
U \arrow[r, "\sigma_U"'] & N_U V \arrow[r, equal] & N_U V & U \arrow[l, "p_U^*"]
\end{tikzcd}$$

Les carrés (1), (2), (3) sont commutatifs d'après *loc. cit.* et les carrés (1'), (2'), (3') le sont pour des raisons triviales. Les flèches $\bullet\!\!\longrightarrow$ qui apparaissent dans ce diagramme sont bien des morphismes de complexes et induisent donc des morphismes de suite exacte longue de localisation. Il suffit alors d'appliquer le fait que les morphismes p^*, p_T^* et p_U^* sont des quasi-isomorphismes pour conclure. □

Corollaire 2.8. — *Considérons un carré cartésien*

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, phantom, "\Delta"] & Z \arrow[d, "i"] \\
Y \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

de schémas lisses tels que i (resp. k) est une immersion fermée de codimension pure égale à c, d'immersion ouverte complémentaire $j : U \to X$ (resp. $l : V \to X$). Notons $h : V \to U$ le morphisme induit par f. Alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & A^{p-c}(Z;\phi)_{n-c} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "g^*"] & A^p(X;\phi)_n \arrow[r, "j^*"] \arrow[d, "f^*"] & A^p(U;\phi)_n \arrow[r, "\partial_Z^U"] \arrow[d, "h^*"] & A^{p-c+1}(Z;\phi)_{n-c} \arrow[r] \arrow[d, "g^*"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & A^{p-c}(T;\phi)_{n-c} \arrow[r, "k_*"] & A^p(Y;\phi)_n \arrow[r, "l^*"] & A^p(V;\phi)_n \arrow[r, "\partial_T^V"] & A^{p-c+1}(T;\phi)_{n-c} \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Remarque 2.9. — Dans l'article [**Dég08b**], une *paire fermée* est un couple (X, Z) tel que X est un schéma lisse et Z un sous-schéma fermé. On dit que (X, Z) est lisse (resp. de codimension n) si Z est lisse (resp. purement de codimension n dans X). Si $i : Z \to X$ est l'immersion fermée associée, un *morphisme de paires fermées* (f, g)

13. Il y a une faute de frappe dans le diagramme commutatif de *loc. cit.* Il faut lire $t^* N_Z X$ au lieu de $N_Y X$.

est un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k"'] & Z \arrow[d, "i"] \\ Y \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd}$$

qui est topologiquement cartésien. On dit que (f,g) est *cartésien* (resp. *transverse*) quand le carré est cartésien (resp. et le morphisme induit sur les cônes normaux $C_T Y \to g^{-1}C_Z X$ est un isomorphisme). (14)
Le corollaire précédent montre que la suite de localisation associée à un module de cycles ϕ et une paire fermée (X,Z) est naturelle par rapport aux morphismes transverses.

2.4. Module homotopique associé. —

2.10. — Considérons un module de cycles ϕ. D'après 2.5, $A^0(.;\phi)_*$ définit un préfaisceau gradué avec transferts. D'après [**Dég06**, 6.9], c'est un faisceau homotopique gradué. On le note F_*^ϕ et on lui définit une structure de module homotopique comme suit :
Soit X un schéma lisse. On considère le début de la suite exacte longue de localisation (2.5.c) associée à la section nulle $X \to \mathbb{A}^1_X$:

$$0 \to F_n^\phi(\mathbb{A}^1_X) \xrightarrow{j_X^*} F_n^\phi(\mathbb{G}_m \times X) \xrightarrow{\partial_0^X} F_{n-1}^\phi(X) \to \dots$$

On peut décrire le morphisme ∂_0^X si X est connexe de corps des fonctions E comme étant induit par le morphisme

$$\partial_0^E : \phi_n(E(t)) \to \phi_{n-1}(E)$$

associé à la valuation standard de $E(t)$.
Soit $s_1 : X \to \mathbb{G}_m \times X$ la section unité. Rappelons que $(F_n^\phi)_{-1}(X) = \mathrm{Ker}(s_1^*)$. Or par invariance par homotopie de F_n^ϕ, le morphisme canonique $\mathrm{Ker}(s_1^*) \to \mathrm{coKer}(j^*)$ est un isomorphisme. Ainsi, le morphisme ∂_0^X induit un morphisme

$$\epsilon_{n,X} : (F_n^\phi)_{-1}(X) \to F_{n-1}^\phi(X).$$

On vérifie que la suite de localisation précédente est compatible aux transferts en X, comme cela résulte de la description des transferts rappelée en 2.5 et du corollaire 2.8. Ainsi, ϵ_n définit un morphisme de faisceaux homotopiques. Pour tout corps de fonctions E, $A^1(\mathbb{A}^1_E;\phi) = 0$ (*cf.* [**Ros96**, (2.2)(H)]). Donc la fibre de ϵ_n en E est un isomorphisme ce qui implique que c'est un isomorphisme de faisceaux homotopiques d'après 1.4.

Ainsi, $(F_*^\phi, \epsilon_*^{-1})$ définit un module homotopique qui dépend fonctoriellement de ϕ.

14. Lorsque (X,Z) est lisse de codimension n le fait que le morphisme (f,g) est transverse entraîne que (Y,T) est lisse de codimension n (k est régulier).

3. Equivalence de catégories

3.1. Transformée générique. — Considérons un couple (E, n) formé d'un corps de fonctions E et d'un entier relatif n. Rappelons que l'on a associé dans [**Dég08b**, 3.3.1] au couple (E, n) un *motif générique*

$$M(E)\{n\} = \text{"}\varprojlim_{A \subset E}\text{"}\ M(\mathrm{Spec}(A))\{n\}$$

dans la catégorie des pro-objets de $DM_{gm}(k)$. On note $DM^{(0)}_{gm}(k)$ la catégorie des motifs génériques.

3.1. — Considérons un module homotopique (F_*, ϵ_*) ainsi que le foncteur de réalisation $\varphi : DM_{gm}(k)^{op} \to \mathscr{A}b$ qui lui est associé dans la section 1.3. On note $\hat{\varphi}$ le prolongement évident de φ à la catégorie des pro-objets. Il résulte de [**Dég08b**, 6.2.1] que la restriction de $\hat{\varphi}$ à la catégorie $DM^{(0)}_{gm}(k)$ est un module de cycles, que l'on note $\hat{F}_*$ et que l'on appelle la *transformée générique* de F_*.

Rappelons brièvement certaines parties de la construction de [**Dég08b**]. Notons d'abord que pour tout motif générique $M(E)\{n\}$, $\hat{\varphi}(M(E)\{n\}) = \hat{F}_{-n}(E)$ n'est autre que la fibre de F_{-n} en E (*cf.* 1.4). La transformée $\hat{F}_*$ s'interprète donc comme le *système des fibres* de F_*. Ce sont les *morphismes de spécialisation* entre ces fibres qui donnent la structure de pré-module de cycles :

(D1) Fonctorialité évidente de F_*.

(D2) ([**Dég08b**, 5.2]) Pour une extension finie L/E, on trouve des modèles respectifs X et Y de E et L ainsi qu'un morphisme fini surjectif $f : Y \to X$ dont l'extension induite des corps de fonctions est isomorphe à L/E. Le graphe de f vu comme cycle de $X \times Y$ définit une correspondance finie de X vers Y notée ${}^{\mathrm{t}}f$ – la *transposée* de f. On en déduit un morphisme $({}^{\mathrm{t}}f)^* : F_*(X) \to F_*(Y)$. On montre que ce morphisme est compatible à la restriction à un ouvert de X et il induit donc la fonctorialité attendue.

(D3) ([**Dég08b**, 5.3]) Soit E un corps de fonctions et $x \in E^\times$ une unité. Considérons un modèle X de E munit d'une section inversible $X \to \mathbb{G}_m$ qui correspond à x. Considérons l'immersion fermée $s_x : X \to \mathbb{G}_m \times X$ induite par cette section. On en déduit un morphisme

$$\gamma_x : F_{n-1}(X) \xrightarrow{\epsilon_{n-1}} (F_n)_{-1}(X) \xrightarrow{\nu} F_n(\mathbb{G}_m \times X) \xrightarrow{s_x^*} F_n(X)$$

où ν est l'inclusion canonique. Ce morphisme est compatible à la restriction suivant un ouvert de X et induit la donnée D3 pour $\hat{F}_*$.

(D4) ([**Dég08b**, 5.4]) Soit (E, v) un corps de fonctions valué. On peut trouver un schéma lisse X munit d'un point x de codimension 1 tel que l'adhérence réduite Z de x dans X est lisse et l'anneau local $\mathcal{O}_{X,x}$ est isomorphe à l'anneau des entiers de v. On pose $U = X - Z$, $j : U \to X$ l'immersion ouverte évidente. Rappelons que le motif relatif $M_Z(X)$ de la paire (X, Z) est définie comme l'objet de $DM^{eff}_{gm}(k)$ représenté par le complexe concentré en degré 0 et -1

avec pour seule différentielle non nulle le morphisme j. Ce motif relatif s'inscrit naturellement dans le triangle distingué

$$M_Z(X)[-1] \xrightarrow{\partial'_{X,Z}} M(U) \xrightarrow{j_*} M(X) \xrightarrow{+1}$$

On a définit dans [**Dég08b**, sec. 2.2.5] un *isomorphisme de pureté*

$$\mathfrak{p}_{X,Z} : M_Z(X) \to M(Z)(1)[2].$$

On en déduit un morphisme

$$\partial_{X,Z} : F_n(U) = \varphi_n(M(U)) \xrightarrow{\varphi_n(\partial'_{X,Z})} \varphi_n(M_Z(X)[-1])$$
$$\xrightarrow{(\varphi_n(\mathfrak{p}_{X,Z}^{-1})} \varphi_n(M(Z)\{1\}) = (F_n)_{-1}(Z) \xrightarrow{\epsilon_n^{-1}} F_{n-1}(Z),$$

ayant posé $\varphi_n(\mathcal{M}) = \varphi(\mathcal{M}\{-n\})$ pour un motif $\mathcal{M}$. Le morphisme résidu du module de cycles $\hat{F}_*$ est donné par la limite inductive des morphismes $\partial_{U,Z\cap U}$ suivant les voisinages ouverts U de x dans X.

3.2. Théorème et démonstration. —

3.2. — Considérons un module de cycles ϕ et X un schéma lisse. D'après [**Ros96**, 6.5], on dispose pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$ d'un isomorphisme canonique $A^p(X;\phi) = H^p_{\mathrm{Zar}}(X;F^\phi)$.
On rappelle la construction de cet isomorphisme tout en le généralisant au cas de la topologie Nisnevich. Notons X_{Nis} le petit site Nisnevich de X. Les morphismes de X_{Nis} étant étales, on obtient, en utilisant la fonctorialité rappelée dans 2.1, un préfaisceau $V/X \mapsto C^*(V;\phi)$ sur X_{Nis} noté $C^*_X(\phi)$. On vérifie que c'est un faisceau Nisnevich (voir [**Dég08b**], preuve de 6.10). On note F^ϕ_X le faisceau $V/X \mapsto A^0(V;\phi)$ sur X_{Nis}. D'après [**Ros96**, 6.1], le morphisme évident $F^\phi_X \to C^*_X(\phi)$ est un quasi-isomorphisme. Il induit donc un isomorphisme

$$H^p_{\mathrm{Nis}}(X;F^\phi_X) \to H^p_{\mathrm{Nis}}(X;C^*_X(\phi)).$$

Notons par ailleurs que le complexe $C^*_X(\phi)$ vérifie la propriété de Brown-Gersten au sens de [**CD09a**, 1.1.9] (voir à nouveau [**Dég08b**], preuve de 6.10). D'après la démonstration de [**CD09a**, 1.1.10], on en déduit que le morphisme canonique

$$H^p(C^*(X;\phi)) \to H^p_{\mathrm{Nis}}(X;C^*_X(\phi))$$

est un isomorphisme. Ces deux isomorphismes définissent comme annoncé :

$$\rho_X : A^p(X;\phi) \xrightarrow{\sim} H^p_{\mathrm{Nis}}(X;F^\phi). \tag{3.2.a}$$

Notons par ailleurs que ρ_X est naturel par rapport aux morphismes de schémas. Considérons d'abord le cas d'un morphisme plat $f : Y \to X$ de schémas lisses. Dans ce cas, on déduit suivant 2.1 un morphisme de complexes

$$f^* : C^*(X;\phi) \to C^*(Y;\phi)$$

qui est naturel en X par rapport aux morphismes étales. La transformation naturelle sur X_{Nis} correspondante définit un morphisme dans la catégorie dérivée des faisceaux abéliens sur X_{Nis} :

$$\eta_f : C^*_X(\phi) \to f_* C^*_Y(\phi)) = \mathrm{R}f_* C^*_Y(\phi).$$

(La dernière identification résulte du fait que $C^*_Y(\phi)$ vérifie la propriété de Brown-Gersten.) Par ailleurs, la structure de faisceau sur $\mathscr{L}_k$ de F^ϕ définit une transformation naturelle $F^\phi_X \to f_* F^\phi_Y$ qui se dérive (quitte à prendre une résolution injective de F^ϕ) et induit une transformation naturelle dans la catégorie dérivée des faisceaux abéliens sur X_{Nis}

$$F^\phi_X \xrightarrow{\tau_f} \mathrm{R}f_*(F^\phi).$$

Par définition de la structure de faisceau sur F^ϕ, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} F^\phi_X \arrow[r] \arrow[d, "\tau_f"'] & C^*_X(\phi) \arrow[d, "\eta_f"] \\ \mathrm{R}f_* F^\phi_Y \arrow[r] & \mathrm{R}f_* C^*_Y(\phi). \end{tikzcd}$$

On en déduit la naturalité de ρ par rapport aux morphismes plats.
Remarquons que si f est la projection d'un fibré vectoriel, η_f est un quasi-isomorphisme. Il reste à considérer le cas d'une immersion fermée $i : Z \to X$ entre schémas lisses. Notons N le fibré normal associé à i. La spécialisation au fibré normal définie par Rost (*cf.* [**Dég06**, 2.1]) est un morphisme de complexes

$$\sigma_Z X : C^*(X; \phi) \to C^*(N; \phi)$$

qui est de plus naturel en X par rapport aux morphismes étales (*cf.* [**Dég06**, 2.2]). Notons ν le morphisme composé

$$N \xrightarrow{p} Z \xrightarrow{i} X.$$

On en déduit dans la catégorie dérivée un morphisme canonique

$$\sigma_i : C^*_X(\phi) \to \mathrm{R}\nu_* C^*_N(\phi).$$

Puisque le morphisme η_p est un quasi-isomorphisme, on obtient alors un morphisme canonique dans la catégorie dérivée

$$\eta_i : C^*_X(\phi) \to \mathrm{R}i_* C^*_Z(\phi).$$

Comme précédemment, on vérifie que le morphisme ρ_i est compatible avec la transformation naturelle $\tau_i : F^\phi_X \to \mathrm{R}i_* F^\phi_Z$ induite par la structure de faisceau sur $\mathscr{L}_k$ de F^ϕ, ce qui permet d'obtenir la fonctorialité de ρ par rapport aux immersions fermées.

Considérons par ailleurs le foncteur de réalisation

$$\varphi : DM_{gm}(k)^{op} \to \mathscr{A}b$$

associé au module homotopique F^ϕ suivant la section 1.3. L'isomorphisme ρ_X correspond par définition à un isomorphisme :

$$A^p(X, \phi)_n \to \varphi_n(M(X)[-p]).$$

Considérons de plus une immersion fermée $i : Z \to X$ entre schémas lisses et $j : U \to X$ l'immersion ouverte du complémentaire. Supposons que i est de codimension pure égale à c. On déduit de la suite exacte de localisation (2.5.b) une unique flèche pointillée qui fait commuter le diagramme de complexes suivant (on utilise à nouveau le fait que $C^*_X(\phi)$ vérifie la propriété de Brown-Gersten) :

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & C^*(Z,\phi)_{n-c}[-c] \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, dashed, "(1)"'] & C^*(X,\phi)_n \arrow[r, "j^*"] \arrow[d] & C^*(U,\phi)_n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{R}\Gamma_Z(X, C^*_X(\phi))_n \arrow[r] & \mathrm{R}\Gamma(X, C^*_X(\phi))_n \arrow[r, "j^*"] & \mathrm{R}\Gamma(U, C^*_X(\phi))_n \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

La flèche (1) est un quasi-isomorphisme, puisqu'il en est de même des deux autres flèches verticales. Considérons le motif relatif $M_Z(X)$ associé la paire fermée (X,Z) – *cf.* 3.1, (D4). En utilisant l'isomorphisme (1) et l'identification canonique $H^p_Z(X;F^\phi)_n = \phi_n(M_Z(X)[-p])$, on obtient un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} A^{p-1}(U,\phi)_n \arrow[r, "\partial^U_Z"] \arrow[d, "\rho_U"'] & A^{p-c}(Z,\phi)_{n-c} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\rho'_{X,Z}"] & A^p(X,\phi)_n \arrow[d, "\rho_X"] \\ \varphi_n(M(U)[-p]) \arrow[r] & \varphi_n(M_Z(X)[-p]) \arrow[r] & \varphi_n(M(X)[-p]) \end{tikzcd}$$

dans lequel les flèches verticales sont des isomorphismes. Le morphisme $\rho'_{X,Z}$ est de plus naturel en (X,Z) par rapport aux morphismes transverses (définis en 2.9). Cela résulte en effet du corollaire 2.8, ou plus précisément du diagramme commutatif apparaissant dans la démonstration de 2.6, en utilisant d'une part l'unicité de la flèche pointillée (1) et d'autre part la description de la fontorialité dérivée de $C^*_X(\phi)$ établie ci-dessus – *i.e.* les transformations naturelles τ_f et τ_i.
Comme conséquence de cette construction, on obtient le lemme clé suivant :

Lemme 3.3. — *Reprenons les hypothèses introduites ci-dessus. Considérons le triangle de Gysin (*cf. [**Dég08b**, 2.3.1]*) associé à* (X,Z) *:*

$$M(U) \to M(X) \xrightarrow{i^*} M(Z)(c)[2c] \xrightarrow{\partial_{X,Z}} M(U)[1].$$

Alors, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} A^{p-1}(U,\phi)_n \arrow[r, "\partial^U_Z"] \arrow[dd, "\rho_U"'] & A^{p-c}(Z,\phi)_{n-c} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\rho_Z"] & A^p(X,\phi)_n \arrow[dd, "\rho_X"] \\ & \varphi_{n-c}(M(Z)[c-p]) \arrow[d, equal] & \\ \varphi_n(M(U)[-p]) \arrow[r, "\varphi_n(\partial_{X,Z})"] & \varphi_n(M(Z)(c)[2c-p]) \arrow[r, "\varphi_n(i^*)"] & \varphi_n(M(X)[-p]). \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Considérons l'isomorphisme de pureté définit dans [**Dég08b**, sec. 2.2.5]

$$\mathfrak{p}_{X,Z} : M_Z(X) \to M(Z)(c)[2c].$$

Dès lors, d'après ce qui précède, l'isomorphisme composé

$$\rho_{X,Z} : A^{p-c}(Z,\phi)_{n-c} \xrightarrow{\rho'_{X,Z}} \varphi_n(M_Z(X)[-p]) \xrightarrow{\varphi(\mathfrak{p}_{X,Z})} \varphi_n(M(Z)(c)[2c-p]) = \varphi_{n-c}(M(Z)[c-p])$$

s'inscrit dans le diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd}
A^{p-1}(U,\phi)_n \arrow[r, "\partial_Z^U"] \arrow[dd, "\rho_U"'] & A^{p-c}(Z,\phi)_{n-c} \arrow[r, "i_*"] \arrow[d, "\rho_{X,Z}"] & A^p(X,\phi)_n \arrow[dd, "\rho_X"] \\
& \varphi_{n-c}(M(Z)[c-p]) \arrow[d, equal] & \\
\varphi_n(M(U)[-p]) \arrow[r, "\varphi_n(\partial_{X,Z})"] & \varphi_n(M(Z)(c)[2c-p]) \arrow[r, "\varphi_n(i^*)"] & \varphi_n(M(X)[-p]).
\end{tikzcd}$$

Il s'agit de voir que $\rho_{X,Z} = \rho_Z$. Notons que d'après ce qui précède, le morphisme $\rho_{X,Z} - \rho_Z$ est naturel en (X,Z) par rapport aux morphisme transverses (définis en 2.9). Soit $P_Z X$ la complétion projective du fibré normal de Z dans X. Considérons l'éclatement $B_Z(\mathbb{A}^1_X)$ de $Z \times \{0\}$ dans X, ainsi que le diagramme de déformation classique qui lui est associé

$$(X,Z) \xrightarrow{(d,i_1)} (B_Z(\mathbb{A}^1_X), \mathbb{A}^1_Z) \xleftarrow{(d',i_0)} (P_Z X, Z).$$

Les carrés correspondants à (d,i_1) et (d',i_0) sont transverses. On est donc réduit au cas où $(X,Z) = (P_Z X, Z)$. Dans ce cas, l'immersion fermée i admet une rétraction et le morphismes $\rho_{X,Z}$ (resp. ρ_Z) est déterminé de manière unique par ρ_X. □

Théorème 3.4. — *Les foncteurs*

$$\begin{array}{rcl} HI_*(k) & \leftrightarrows & \mathscr{M}Cycl(k) \\ F_* & \mapsto & \hat{F}_* \\ F_*^{\phi} & \leftarrow\!\shortmid & \phi \end{array}$$

sont des équivalences de catégories quasi-inverses l'une de l'autre.

Démonstration. — Il s'agit de construire les deux isomorphismes naturels qui réalisent l'équivalence.

Premier isomorphisme : Considérons un module de cycles ϕ, F_*^{ϕ} le module homotopique associé. Par définition, pour tout corps de fonctions E, il existe une flèche canonique

$$a_E : \hat{F}_n^{\phi}(E) = \varinjlim_{A \subset E} A^0(\mathrm{Spec}(A);\phi)_n \to \phi_n(E).$$

C'est trivialement un isomorphisme et il reste à montrer que a définit un morphisme de modules de cycles. La compatibilité à (D1) est évidente. La compatibilité à (D2) résulte du fait que pour un morphisme fini surjectif $f : Y \to X$, le morphisme $A^0({}^{\mathrm{t}}f;\phi)$ est le pushout f_* propre (*cf.* [**Dég08b**, 6.6]).

Compatibilité à (D3) : On reprend les notations du point (D3) de 3.1 pour le module homotopique F_*^ϕ et pour une unité $x \in E^\times$. On considère la flèche canonique

$$a'_E : \hat{F}_n^\phi(\mathbb{G}_m \times (E)) = \varinjlim_{A \subset E} A^0\big(\mathrm{Spec}(A[t,t^{-1}]);\phi\big)_n \longrightarrow \phi_n(E(t)).$$

Pour tout E-point y de $\mathrm{Spec}(E[t])$, on note v_y la valuation de $E(t)$ correspondante, d'uniformisante $t-y$. D'après la proposition 2.3, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\hat{F}_n^\phi(\mathbb{G}_m \times (E)) \arrow[r, "s_x^*"] \arrow[d, "a'_E"'] & \hat{F}_n^\phi(E) \arrow[d, "a_E"] \\
\phi_n(E(t)) \arrow[r, "s_{v_x}^{t-x}"] & \phi_n(E).
\end{tikzcd}$$

Par définition du morphisme structural ϵ_* de F_*^ϕ (*cf.* 2.10), le morphisme ν' : $\hat{F}_{n-1}^\phi(E) \xrightarrow{\epsilon_{n-1}} (\hat{F}_n^\phi)_{-1}(E) \xrightarrow{\nu} \bar{F}_n^\phi(\mathbb{G}_m \times (E))$ est la section de la suite exacte courte

$$0 \to \hat{F}_n^\phi(E) \xrightarrow{p^*} \hat{F}_n^\phi(\mathbb{G}_m \times (E)) \xrightarrow{\partial} \hat{F}_{n-1}^\phi(E) \to 0$$

qui correspond à la rétraction s_1^* de p^*, pour $s_1 : (E) \to \mathbb{G}_m \times (E)$ la section unité de la projection $p : \mathbb{G}_m \times (E) \to (E)$. En particulier, ν' est caractérisé par les propriétés $\partial\nu' = 1$ et $s_1^*\nu' = 0$.

Notons $\varphi : E \to E(t)$ l'inclusion canonique. On peut vérifier en utilisant les relations des pré-modules de cycles les formules suivantes :

(1) $\forall \rho \in \phi_n(E), \partial_{v_0}(\{t\}.\varphi_*(\rho)) = \rho$.

(2) $\forall y \in E^\times, \forall \rho \in \phi_n(E), \partial_{v_y}(\{t\}.\varphi_*(\rho)) = 0$.

(3) $\forall y \in E^\times, \forall \rho \in \phi_n(E), s_{v_y}^{t-y}(\{t-y\}.\varphi_*(\rho)) = \{y\}.\rho$.

D'après (2), l'application $\phi_n(E) \to \phi_n(E(t)), \rho \mapsto \{t\}.\varphi_*(\rho)$ induit une unique flèche pointillée rendant le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{tikzcd}
\hat{F}_n^\phi(E) \arrow[r, dashed] \arrow[d, "a_E"'] & \hat{F}_n^\phi(\mathbb{G}_m \times (E)) \arrow[d, "a'_E"] \\
\phi_n(E(t)) \arrow[r, "\{t\}.\varphi_*"] & \phi_n(E).
\end{tikzcd}$$

D'après la relation (1) et la relation (3) avec $y = 1$, cette flèche pointillée satisfait les deux propriétés caractérisant ν'. On déduit donc de la relation (3) avec $y = x$ que $\nu' \circ s_x^*(\rho) = \{x\}.\rho$ ce qui prouve la relation attendue.

Compatibilité à (D4) : Considérons les notations du point (D4) dans 3.1. La compatibilité au résidu est alors une conséquence directe du lemme 3.3 appliqué, pour tout voisinage ouvert U de x dans X, à l'immersion fermée $i : Z \cap U \to U$ dans le cas $c = 1$, $p = 1$.

Deuxième isomorphisme : Considérons un module homotopique (F_*, ϵ_*). Pour tout schéma lisse X, en considérant la limite inductive des morphismes de restriction $F(X) \to F(U)$ pour les ouverts U de X, on obtient une flèche $F_*(X) \to C^0(X;\hat{F}_*)$ qui induit par définition des différentielles un morphisme $b_X : F_*(X) \to A^0(X;\hat{F}_*)$ homogène de degré 0.

Le point clé est de montrer que cette flèche est naturelle par rapport aux correspondances finies. Soit $\alpha \in c(X,Y)$ une correspondance finie entre schémas lisses, que l'on peut supposer connexes. Rappelons que pour tout ouvert dense $j : U \to X$, le morphisme $j^* : A^0(X;\hat{F}_*) \to A^0(U;\hat{F}_*)$ est injectif d'après la suite exacte de localisation (2.5.c). Ainsi, on peut remplacer α par $\alpha \circ j$ et X par U. Par additivité, on se ramène encore au cas où α est la classe d'un sous-schéma fermé intègre Z de $X \times Y$, fini et dominant sur X. Dès lors, $\alpha \circ j = [Z \times_X U]$. Donc puisque k est parfait, quitte à réduire X, on peut supposer que Z est lisse sur k. Rappelons que d'après 2.5, $\alpha^* = p_* i^* q^*$ pour les morphismes évidents suivants

$$X \xleftarrow{p} Z \xrightarrow{i} Z \times X \times Y \xrightarrow{q} Y.$$

On est donc ramené à vérifier la naturalité dans les trois cas suivants :
Premier cas : Si $\alpha = q$ est un morphisme plat, la compatibilité résulte alors de la définition du pullback plat sur $A^0(.;\hat{F}_*)$ est de la définition de D1.
Deuxième cas : Si $\alpha = {}^t p$, $p : Z \to X$ morphisme fini surjectif entre schémas lisses. Ce cas résulte de la définition du pushout propre sur A^0 et de la définition de D2.
Troisième cas : Supposons $\alpha = i$, pour $i : Z \to X$ immersion fermée régulière entre schémas lisses. Comme on l'a déjà vu, l'assertion est locale en X. On se réduit donc en factorisant i au cas de codimension 1. On peut aussi supposer que Z est un diviseur principal paramétré par $\pi \in \mathcal{O}_X(U)$, pour $U = X - Z$. D'après la proposition 2.3, on est ramené à montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd}
F_*(X) \arrow[r, "i^*"] \arrow[d] & F_*(Z) \arrow[d] \\
\hat{F}_*(\kappa(X)) \arrow[r, "s_v^\pi"] & \hat{F}_*(\kappa(Z)).
\end{tikzcd}$$

Tenant compte de la naturalité du morphisme structural ϵ_* du module homotopique F_*, on se ramène à la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd}
\varphi(M(X)\{1\}) \arrow[rrr, "i^*"] \arrow[d, "j^*"'] & & & \varphi(M(Z)\{1\}) \arrow[d, equal] \\
\varphi(M(U)\{1\}) \arrow[r, "\nu"] & \varphi(M(\mathbb{G}_m \times U)) \arrow[r, "\gamma_\pi^*"] & \varphi(M(U)) \arrow[r, "\partial_{X,Z}"] & \varphi(M(Z)\{1\})
\end{tikzcd}$$

où ν est l'inclusion canonique, γ_π est induit par $\pi : U \to \mathbb{G}_m$ et $\partial_{X,Z} = \partial'_{X,Z} \circ \mathfrak{p}_{X,Z}^{-1}$ avec les notations de 3.1(D4) est le morphisme résidu au niveau des motifs. Or la commutativité de ce diagramme résulte exactement de [**Dég08b**, 2.6.5].

Le morphisme $b : F_* \to A^0(.;\hat{F}_*)$ est donc un morphisme de faisceaux avec transferts. Or, il est évident que le morphisme induit sur les fibres en un corps de fontions quelconque est un isomorphisme. Il en résulte (*cf.* 1.4) que b est un isomorphisme. Enfin, on établit facilement la compatibilité de b avec les morphismes structuraux des modules homotopiques F_* et $A^0(.;\hat{F}_*)$ compte tenu de la construction 2.10 – on utilise simplement la fonctorialité de b par rapport à $j_X : \mathbb{G}_m \times X \to \mathbb{A}^1_X$ et $s_1 : X \to \mathbb{G}_m \times X$. $\square$

3.5. — Le théorème précédent montre que la catégorie des modules de cycles est monoïdale symétrique avec pour élément neutre le foncteur de K-théorie de Milnor.

Le produit tensoriel est de plus compatible au foncteur de décalage de la graduation des modules de cycles – *i.e.* le foncteur noté $\{\pm 1\}$ dans $HI_*(k)$.

A tout schéma lisse X, on associe un module de cycles

$$\hat{h}_{0,*}(X) = (h_{0,*}(X))^\wedge.$$

D'après le théorème précédent, la famille de modules de cycles $(\hat{h}_{0,*}(X)\{n\})$ pour un schéma lisse X et un entier $n \in \mathbb{Z}$ est génératrice dans la catégorie abélienne $\mathscr{M}Cycl(k)$.
Notons que ces générateurs caractérisent le produit tensoriel des modules de cycles :

$$\hat{h}_{0,*}(X)\{n\} \otimes \hat{h}_{0,*}(Y)\{m\} = \hat{h}_{0,*}(X \times Y)\{n+m\}.$$

On peut enfin donner une formule explicite pour calculer ces modules de cycles. Considérons pour tous schémas lisses X et Y le groupe

$$\pi(Y, X) = \mathrm{coKer}\left(c(\mathbb{A}^1_Y, X) \xrightarrow{s_0^* - s_1^*} c(Y, X)\right).$$

Notons que ce groupe s'étend de manière évidente aux schémas réguliers essentiellement de type fini sur k et que l'on dipose d'un théorème de commutation aux limites projectives de schémas pour ces groupes étendus (*cf.* [**Dég07**, 4.1.24]). Par ailleurs, si E est un corps de fonctions, $\pi(\mathrm{Spec}(E), X) = CH_0(X_E)$, groupe de Chow des 0-cycles de X étendu à E.

On déduit de tout cela les calculs suivants : Pour tout corps de fonctions E et tout schéma lisse X,

$$\hat{h}_{0,0}(X).E = CH_0(X_E).$$

De plus, pour tout entier $n > 0$,

$$\hat{h}_{0,n}(X).E = \mathrm{coKer}\left(\oplus_{i=0}^n CH_0(\mathbb{G}_m^{n-1} \times X_E) \to CH_0(\mathbb{G}_m^n \times X_E)\right)$$
$$\hat{h}_{0,-n}(X).E = \mathrm{Ker}\left(\pi(\mathbb{G}_{m,E}^n, X) \to \oplus_{i=0}^n \pi(\mathbb{G}_{m,E}^{n-1}, X)\right)$$

où les flèches sont induites par les injections évidentes $\mathbb{G}_m^i \times \{1\} \times \mathbb{G}_m^{n-1-i} \to \mathbb{G}_m^n$.

3.3. Résolution de Gersten et cohomologie. — Soit F_* un module homotopique, $\phi = \hat{F}_*$ sa transformée générique. Considérons l'isomorphisme $b : F_* \to F_*^\phi$ qui lui est associé d'après le théorème précédent. Compte tenu de l'isomorphisme (3.2.a), on en déduit un isomorphisme

$$\epsilon_X : H^n_{\mathrm{Nis}}(X; F_*) \xrightarrow{b_*} H^n_{\mathrm{Nis}}(X; F_*^\phi) \xrightarrow{\rho_X^{-1}} A^n(X; \hat{F}_*).$$

Proposition 3.6. — *Avec les notations ci-dessus, ϵ_X est un isomorphisme compatible avec les transferts par rapport à X.*

Démonstration. — Par définition, on est ramené à prouver la compatibilité de ρ_X^{-1} : $H^n_{\mathrm{Nis}}(X; F_*^\phi) \to A^n(X; \phi)$ par rapport aux transferts en X pour un module de cycles arbitraire ϕ.

Pour un schéma simplicial $\mathcal{X}$, on note $F^\phi(\mathcal{X})$ le complexe des sommes alternées associé au groupe abélien cosimplicial évident. Rappelons l'isomorphisme canonique

$$H^n_{\mathrm{Nis}}(X; F^\phi_*) = \varinjlim_{\mathcal{X}/X} H^n F^\phi_*(\mathcal{X})$$

où la limite inductive parcourt les hyper-recouvrements Nisnevich de X.
Pour un schéma simplicial $\mathcal{X}$, on note $\operatorname{Tot} C^*(\mathcal{X};\phi)$ le complexe total associé au bicomplexe évident. Pour un hyper-recouvrement Nisnevich $\mathcal{X}/X$, on obtient alors des morphismes de complexes, naturels en $\mathcal{X}$,

$$F^\phi_*(\mathcal{X}) \xrightarrow{(1)} \operatorname{Tot} C^*(\mathcal{X};\phi) \xleftarrow{(2)} C^*(X;\phi).$$

Suivant la construction de (3.2.a), le morphisme ρ_X^{-1} est égal à :

$$\varinjlim_{\mathcal{X}/X} H^n F^\phi_*(\mathcal{X}) \to \varinjlim_{\mathcal{X}/X} H^n \operatorname{Tot} C^*(\mathcal{X};\phi) \xrightarrow{(2')} H^n C^*(X;\phi)$$

où la flèche $(2')$ est la réciproque de la limite des flèches de type $H^n(2)$.
Pour vérifier la compatibilité de cet isomorphisme avec les transferts, on est alors ramené au lemme suivant :

Lemme 3.7. — *Soit $\alpha \in c(Y,X)$ une correspondance finie entre deux schémas lisses. Alors, pour tout hyper-recouvrement $\mathcal{X}$ Nisnevich de X, il existe un hyper-recouvrement Nisnevich $\mathcal{Y}$ de Y et une transformation naturelle $\tilde{\alpha}$ faisant commuter le diagramme*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}^{tr}(\mathcal{Y}) \arrow[r, "\tilde{\alpha}"] \arrow[d] & \mathbb{Z}^{tr}(\mathcal{X}) \arrow[d] \\ \mathbb{Z}^{tr}(Y) \arrow[r, "\alpha"] & \mathbb{Z}^{tr}(X) \end{tikzcd}$$

où $\mathbb{Z}^{tr}(\mathcal{X})$ (resp. $\mathbb{Z}^{tr}(\mathcal{Y})$) désigne le complexe de faisceaux associé au faisceau simplicial évident.

Notons que d'après [**Dég07**, 4.2.9], le morphisme canonique $\mathbb{Z}^{tr}(\mathcal{X}) \to \mathbb{Z}^{tr}(X)$ est un quasi-isomorphisme. Le lemme en résulte dès lors, suivant une construction par induction.

Ce lemme nous permet de conclure. En effet, considérant α et $\tilde{\alpha}$ comme ci-dessus, les morphismes du type $H^n(1)$ et $H^n(2)$ sont naturels par rapport à α et $\tilde{\alpha}$, comme il résulte de la compatibilité des groupes $A^n(.;\phi)$ par rapport au produit de composition des correspondances. □

3.8. — Considérons le module homotopique S^*_t. Suivant [**SV00**, 3.4], pour tout corps de fontions E, $S^*_t(E) \simeq K^M_*(E)$. Cet isomorphisme est de plus compatible aux structures de module de cycles. Pour la norme, cela résulte de [**SV00**, 3.4.1]. Pour le résidu associé à un corps de fontions valué (E,v), on se réduit à montrer que $\partial_v(\pi) = 1$ pour le module de cycle $\hat{S}^*_t$, ce qui résulte de [**Dég07**, 2.6.5].

On en déduit l'isomorphisme de Bloch [15] pour tout schéma lisse X :

$$\epsilon_X^{\mathrm{B}} : H^n_{\mathrm{Nis}}(X; S^n_t) \to A^n(X; K^M_*)_n = CH^n(X).$$

Cet isomorphisme est naturel par rapport aux transferts.

Rappelons que pour tout module de cycles ϕ, il existe un accouplement de modules de cycles $K^M_* \times \phi \to \phi$ au sens de [**Ros96**, 1.2]. Il induit d'après [**Ros96**, par. 14] un accouplement

$$A^m(X; \phi)_r \otimes CH^n(X) \to A^{m+n}(X; \phi)_{r+n}.$$

Considérant un module homotopique F_*, on dispose d'un (iso)morphisme de modules homotopiques $S^*_t \otimes F_* \to F_*$. Pour un schéma lisse X, de diagonale $\delta : X \to X \times X$, on en déduit un accouplement

$$H^m(X; F_*)_r \otimes H^n(X; S^*_t)_n \to H^{m+n}(X; F_*)_{r+n}$$

définit en associant aux morphismes $a : h_{0,*}(X) \to S^*_t\{n\}[n]$ et $b : h_{0,*}(X) \to F_*\{r\}[m]$ la composée

$$h_{0,*}(X) \xrightarrow{\delta_*} h_{0,*}(X) \otimes h_{0,*}(X) \xrightarrow{a\otimes b} S^*_t \otimes F_*\{n+r\}[n+m] \xrightarrow{\sim} F_*\{n+r\}[n+m].$$

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier la compatibilité suivante :

Lemme 3.9. — *Avec les notations introduites ci-dessus, le diagramme suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} H^m(X; F_*)_r \otimes H^n(X; S^*_t)_n \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon_X \otimes \epsilon_X^{\mathrm{B}}"'] & H^{n+m}(X; F_*)_{n+r} \arrow[d, "\epsilon_X"] \\ A^m(X; \phi)_r \otimes CH^n(X) \arrow[r] & A^{m+n}(X; \hat{F}_*)_{n+r} \end{tikzcd}$$

Ainsi, l'isomorphisme ϵ_X^{B} est compatible au produit, et l'isomorphisme ϵ_X est compatible aux structures de module décrites ci-dessus.

3.10. — Notons $\varphi : DM_{gm}(k)^{op} \to \mathscr{A}b$ le foncteur de réalisation associé à F_* (*cf.* section 1.3). D'après la proposition précédente, le foncteur φ prolonge le foncteur $A^*(.; \hat{F}_*)$. Ainsi, on a étendu canoniquement la cohomologie à coefficients dans un module de cycles quelconque en un foncteur de réalisation triangulé de $DM_{gm}(k)$. Nous notons encore

$$\epsilon_X : \varphi(M(X)\{-r\}[-n]) \to A^n(X; \hat{F}_*)_r$$

l'isomorphisme qui se déduit par construction de 3.6.

Soit $f : Y \to X$ un morphisme projectif entre schémas lisses, de dimension relative constante d. Dans [**Dég08a**, 2.7], on a construit $f^* : M(X)(d)[2d] \to M(Y)$, morphisme de Gysin associé à f dans $DM_{gm}(k)$.

15. En effet, d'après l'isomorphisme que l'on vient d'expliciter, le faisceau gradué S^*_t est le faisceau de K-théorie de Milnor non ramifié.

Proposition 3.11. — *Considérons les notations introduites ci-dessus. Alors, le carré suivant est commutatif :*

$$\begin{tikzcd} \varphi\big(M(X)\{d-r\}[d-n]\big) \arrow[r, "\varphi(f^*)"] \arrow[d, "\epsilon_X"'] & \varphi\big(M(Y)\{-r\}[-n]\big) \arrow[d, "\epsilon_Y"] \\ A^{n-d}(X;\hat{F}_*)_{r-d} \arrow[r, "f_*"] & A^n(Y;\hat{F}_*)_r \end{tikzcd}$$

Démonstration. — Dans cette preuve, on utilisera particulièrement le lemme suivant :

Lemme 3.12. — *Soit X un schéma lisse et E/X un fibré vectoriel de rang n. Soit $p : P \to X$ le fibré projectif associé, et λ le fibré inversible canonique sur P tel que $\lambda \subset p^{-1}(E)$. On note $c = c_1(\lambda) \in CH^1(X)$ la première classe de Chern de λ.*

Alors, le morphisme suivant est un isomorphisme :

$$\begin{array}{rcl} \bigoplus_{i=0}^n A^*(X;\hat{F}_*) & \to & A^*(P;\hat{F}_*) \\ x_i & \mapsto & p^*(x_i).c^i. \end{array}$$

en utilisant la structure de $CH^*(X)$-module (ici notée à droite) de $A^*(X;\hat{F}_*)$ rappelée en 3.8.

Pour obtenir ce lemme, il suffit d'appliquer le théorème du fibré projectif dans $DM_{gm}(k)$ (*cf.* [**Voe00b**, 2.5.1]) et de regarder son image par φ compte tenu du lemme 3.9.

Soit E un fibré vectoriel sur X et P sa complétion projective. On déduit de ce lemme le cas où $f = p$. En effet, d'après la formule de projection

$$p_*(p^*(x_i).c^i) = x_i.p_*(c^i)$$

pour les groupes de Chow à coefficients (*cf.* [**Dég06**, 5.9]), on déduit que p_* est la projection évidente à travers le théorème du fibré projectif. L'analogue de ce calcul pour $\varphi(p^*)$ résulte des définitions de [**Dég08a**].

Compte tenu de la définition du morphisme de Gysin et du cas que l'on vient de traiter, nous sommes ramenés au cas où $f = i : Z \to X$ est une immersion fermée, que l'on peut supposer de codimension pure égale à c. Ce cas est alors une conséquence directe du lemme 3.3. □

PARTIE II
MOTIFS MIXTES TRIANGULÉS

4. Cas effectif

4.1. Complexes de faisceaux avec transferts. —

4.1. — On note $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$ la catégorie des complexes (non nécessairement bornés) de faisceaux avec transferts.

Pour tout faisceau avec transferts F et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on note $D^n F$ le complexe concentré en degrés n et $n+1$ dont la seule diférentielle non nulle est l'identité de F. On note $S^n F$ le complexe concentré en degré n égal à F. On définit la classe des *cofibrations* comme la plus petite classe stable par pushout, composition transfinie et rétracte contenant les morphismes de complexes évidents $S^{n+1}\mathbb{Z}^{tr}(X) \to D^n\mathbb{Z}^{tr}(X)$.

On dit qu'un complexe de faisceau avec transferts C est *Nis-local* si pour tout schéma lisse X et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme canonique

$$H^n\big(C(X)\big) \to H^n_{\mathrm{Nis}}(X, C)$$

est un isomorphisme. On dit qu'un morphisme $\phi : C \to D$ de $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$ est une fibration si c'est un épimorphisme dans la catégorie $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$ et son noyau est Nis-local.

Proposition 4.2. — *La catégorie* $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$ *avec pour équivalences faibles les quasi-isomorphismes, munie des cofibrations et des fibrations définies ci-dessus, est une catégorie de modèles.*

Cela résulte du théorème 1.7 de [**CD09b**], compte tenu de l'exemple 1.6. Rappelons qu'un point essentiel dans cette proposition est le résultat suivant (voir [**Dég07**, 4.2.9]) dû à Voevodsky :

Proposition 4.3. — *Pour tout complexe de faisceaux avec transferts C, tout schéma lisse X et tout entier $n \in \mathbb{Z}$,*

$$\mathrm{Hom}_{D(Sh^{tr}(k))}(\mathbb{Z}^{tr}(X), C[n]) = H^n_{Nis}(X, C).$$

Remarque 4.4. — Par définition, un complexe de faisceaux avec transferts C est fibrant (*i.e.* Nis-local) si il est fibrant au sens de [**CD09a**, 1.1.5] en tant que complexe de faisceaux Nisnevich (ayant oublié les transferts). Il résulte donc de *op. cit.* prop. 1.1.10 que cette propriété est équivalente à la suivante :

(BG) Pour tout carré cartésien $\begin{tikzcd} W \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d, "f"] \\ U \arrow[r, "j"] & X \end{tikzcd}$ tel que j est une immersion ouverte, f est étale et $f^{-1}(X-U) \to X-U$ est un isomorphisme topologique, le carré

$$\begin{tikzcd} C(X) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "j^*"'] & C(V) \arrow[d] \\ C(U) \arrow[r] & C(W) \end{tikzcd}$$

est homotopiquement cartésien.

4.5. — La catégorie $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$ est symétrique monoïdale. Le produit tensoriel de deux complexes C et D est donné par la formule

$$(C \otimes^{\mathrm{tr}} D)^n = \oplus_{p+q=n} C^p \otimes^{\mathrm{tr}} D^q$$
$$d(x \otimes^{\mathrm{tr}} y) = dx \otimes^{\mathrm{tr}} y + (-1)^{\deg(x)} x \otimes^{\mathrm{tr}} dy.$$

L'isomorphisme de symétrie est égal en degré n à la somme des morphismes

$$C^p \otimes^{\mathrm{tr}} D^q \xrightarrow{(-1)^{pq}.\epsilon} D^q \otimes^{\mathrm{tr}} C^p$$

où ϵ est l'isomorphisme de symétrie du produit tensoriel des faisceaux avec transferts.

Ce produit tensoriel est exact à droite. Comme la catégorie $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$ est abélienne de Grothendieck, on en déduit l'existence formelle du foncteur Hom interne $\underline{\mathrm{Hom}}$ adjoint à droite de $\otimes^{\mathrm{tr}}$. Explicitement, ce foncteur est donné par la formule :

$$\underline{\mathrm{Hom}}(C, D) = \mathrm{Tot}^{\pi}\, \underline{\mathrm{Hom}}_{Sh^{tr}(k)}(C, D)$$

où Tot^{π} désigne le complexe total produit d'un bicomplexe de faisceaux avec transferts.

Proposition 4.6. — *La catégorie* $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$ *munie des structures introduites ci-dessus est une catégorie de modèles symétrique monoïdale.*

Cela résulte de la proposition 2.3 de [**CD09b**], compte tenu de l'exemple 2.4. On obtient donc un produit tensoriel dérivé : soit C (resp. D) un complexe de faisceaux avec transferts et $C' \to C$ (resp. $D' \to D$) une résolution cofibrante. Alors, $C \otimes^{\mathrm{tr,L}} D = C' \otimes^{\mathrm{tr}} D'$. Ainsi, puisque pour tout schéma lisse X le faisceau $\mathbb{Z}^{tr}(X)$ placé en degré 0 est cofibrant, $\mathbb{Z}^{tr}(X) \otimes^{\mathrm{tr,L}} \mathbb{Z}^{tr}(Y) = \mathbb{Z}^{tr}(X \times Y)$.
On peut définir aussi le Hom interne dérivé, en considérant de plus une résolution fibrante $D \to D''$:

$$\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(C, D) = \underline{\mathrm{Hom}}(C', D'').$$

4.2. Complexes motiviques. —

4.7. — On dit qu'un complexe de faisceaux avec transferts C est $\mathbb{A}^1$-*local* si pour tout schéma lisse X et tout entier $n \in \mathbb{Z}$, le morphisme induit par la projection canonique

$$H^n_{\mathrm{Nis}}(X, C) \to H^n_{\mathrm{Nis}}(\mathbb{A}^1_X, C)$$

est un isomorphisme.

On dit qu'un morphisme $f : C \to D$ de $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$ est une $\mathbb{A}^1$-*équivalence* si pour tout complexe $\mathbb{A}^1$-local E, le morphisme induit

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))}(D, E) \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))}(C, E)$$

est un isomorphisme. On dit aussi que f est une $\mathbb{A}^1$-*fibration* si c'est un épimorphisme de complexe et son noyau est à la fois Nis-local et $\mathbb{A}^1$-local.

Proposition 4.8. —
1. *La catégorie* $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$ *avec pour équivalences faibles les* $\mathbb{A}^1$*-équivalences, pour fibrations les* $\mathbb{A}^1$*-fibrations et pour cofibrations celles définies en 4.1 est une catégorie de modèles symétrique monoïdale.*
2. *La catégorie homotopique associée s'identifie à la localisation de la catégorie triangulée* $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$ *par rapport à la catégorie localisante engendrée par les morphismes* $\mathbb{Z}^{tr}(\mathbb{A}^1_X) \to \mathbb{Z}^{tr}(X)$.
3. *Cette catégorie homotopique s'identifie encore à la sous-catégorie pleine de* $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$ *formée des complexes* $\mathbb{A}^1$*-locaux.*

Cela résulte de [**CD09b**, 3.5] compte tenu de l'exemple 3.15. Rappelons que la catégorie de modèles de cette proposition est la localisation de Bousfield à gauche de la catégorie de modèles de 4.2. On l'appelle dans la suite la catégorie de modèles $\mathbb{A}^1$-locale sur $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$.

Définition 4.9. — On note $DM^{eff}(k)$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$ formée des complexes $\mathbb{A}^1$-locaux.

On en déduit donc une adjonction de catégories triangulées :

$$L_{\mathbb{A}^1} : \mathrm{D}(Sh^{tr}(k)) \leftrightarrows DM^{eff}(k) : \mathcal{O} \tag{4.9.a}$$

avec $\mathcal{O}$ le foncteur d'inclusion. La catégorie $DM^{eff}(k)$ est triangulée monoïdale symétrique fermée et le foncteur $L_{\mathbb{A}^1}$ est monoïdal. On notera simplement $\otimes$ le produit tensoriel de $DM^{eff}(k)$ (il s'agit du produit tensoriel dérivé de $\otimes^{\mathrm{tr}}$ pour la structure de catégorie de modèles $\mathbb{A}^1$-locale sur $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$). On note aussi $\mathbb{1}$ l'objet unité de la catégorie monoïdale $DM^{eff}(k)$ (16). Pour tout schéma lisse X, on pose $M(X) = L_{\mathbb{A}^1}(\mathbb{Z}^{tr}(X))$.

4.10. — Si C est un complexe de faisceaux avec transferts, et n un entier, on note $\underline{\breve{\mathrm{H}}}^n(C)$ le préfaisceau sur $\mathscr{L}_k^{cor}$ qui à X associe $H^n(C(X))$. On note $\underline{\mathrm{H}}^n(C)$ le faisceau avec transferts associé à $\underline{\breve{\mathrm{H}}}^n(C)$ (*cf.* [**Dég07**, 4.2.7]) (17). Dans notre contexte, le théorème suivant donne une reformulation des résultats principaux de Voevodsky concernant les complexes motiviques (*cf.* [**Voe00b**]) :

Théorème 4.11. — *Soit C un complexe de faisceaux avec transferts. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *C est $\mathbb{A}^1$-local.*

(ii) *Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\underline{\mathrm{H}}^n(C)$ est $\mathbb{A}^1$-local.*

(iii) *Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\underline{\mathrm{H}}^n(C)$ est invariant par homotopie.*

Démonstration. — L'équivalence de (i) et (ii) résulte de la suite spectrale d'hypercohomologie Nisnevich. L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est évidente et sa réciproque résulte du théorème de Voevodsky [**Dég07**, 4.5.1]. $\square$

D'un point de vue terminologique, un *complexe de faisceaux avec transferts* $\mathbb{A}^1$*-local* en notre sens est donc un *complexe motivique* au sens de Voevodsky (à condition qu'il soit borné supérieurement). L'intérêt de la définition que nous avons adoptée est qu'elle garde un sens pour des bases plus générales qu'un corps parfait (*cf.* [**CD09b**] où la construction présentée ici est généralisée au cas d'une base régulière).

4.12. — Notons finalement que Voevodsky obtient une formule explicite pour le foncteur $L_{\mathbb{A}^1}$ grâce au *complexe des chaînes singulières de Suslin* $\underline{\mathrm{C}}^*_{\mathrm{sing}}$ (*cf.* [**Voe00b**, 3.2.3]). Pour un complexe K de faisceau avec transferts,

$$\underline{\mathrm{C}}^*_{\mathrm{sing}}(K) = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}^{tr}(\Delta^*), K)$$

16. Voevodsky le note $\mathbb{Z}$ dans [**Voe00b**].
17. Si l'on oublie les transferts, $\underline{\mathrm{H}}^n(C)$ est le n-ième faisceau de cohomologie de C.

où Δ^* est le schéma cosimplicial standard et $\mathbb{Z}^{tr}(\Delta^*)$ et le complexe de faisceaux avec transferts associé [18].

D'après [**Voe00b**, 3.2.6], on obtient un foncteur pleinement fidèle

$$DM_{gm}^{eff}(k) \to DM^{eff}(k).$$

On obtient aussi ce résultat dans [**CD09b**] (*cf.* exemple 5.5) où l'on démontre de plus que $DM_{gm}^{eff}(k)$ est la sous-catégorie pleine de $DM^{eff}(k)$ formée des complexes K qui sont compacts – *i.e.* le foncteur $\mathrm{Hom}_{DM^{eff}(k)}(K, .)$ commute aux sommes directes quelconques.

4.3. t-structure homotopique. — La catégorie $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$ porte naturellement une t-structure, celle dont les tronqués négatifs sont donnés par la formule

$$\tau_{\leq 0}(K)^n = \begin{cases} K^n & \text{si } n < 0 \\ \mathrm{Ker}(d) & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le foncteur pleinement fidèle $\mathcal{O}$ de l'adjonction (4.9.a) permet de transporter cette t-structure à $DM^{eff}(k)$. Un complexe $\mathbb{A}^1$-local K est dit *positif* (resp. *négatif*) si pour tout $n < 0$ (resp. $n > 0$), $\underline{\mathrm{H}}^n(K) = 0$. Notons que les foncteurs de troncation négatif (ci-dessus) et positif respectent les complexes $\mathbb{A}^1$-locaux d'après le théorème 4.11.

Suivant Voevodsky, on appelle la t-structure sur $DM^{eff}(k)$ ainsi définie la *t-structure homotopique*. Notons que cette t-structure est non dégénérée – comme c'est le cas pour la t-structure canonique sur $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$.

Il est immédiat que le coeur de la t-structure homotopique est équivalent à la catégorie des faisceaux homotopiques $HI(k)$ (introduite dans la partie précédente), ceci grâce au foncteur

$$\underline{\mathrm{H}}^0 : DM^{eff}(k) \to HI(k). \tag{4.12.a}$$

Si F est un faisceau avec transferts, on obtient de plus $\underline{\mathrm{H}}^0(L_{\mathbb{A}^1}F) = h_0(F)$ avec les notations de la première partie, compte tenu de 4.12. De même, pour tout schéma lisse X, $h_0(X) = \underline{\mathrm{H}}^0(M(X))$.

4.13. — Soit T le faisceau avec transferts conoyau du morphism $\mathbb{Z}^{tr}(k) \xrightarrow{s_*} \mathbb{Z}^{tr}(\mathbb{G}_m)$ induit par la section unité. Ainsi, $S_t^1 = \underline{\mathrm{H}}^0(T)$ et on en déduit que si F est un faisceau homotopique, $F_{-1} = \underline{\mathrm{Hom}}(T, F)$ où le Hom interne est calculé dans la catégorie des faisceaux avec transferts.

Pour tout préfaisceau avec transferts F, on pose plus généralement $\Omega F = \underline{\mathrm{Hom}}(T, F)$. Si F est un faisceau (resp. faisceau homotopique), ΩF est un faisceau (resp. faisceau homotopique). Soit a le foncteur faisceau avec transferts associé définit

18. A priori, la formule ci-dessus donne donc un complexe homologique. Ce que l'on note $\underline{\mathrm{C}}^*_{\mathrm{sing}}(K)$ est le complexe cohomologique obtenu en inversant la graduation.

dans [**Dég07**, 4.2.7]. Pour tout préfaisceau avec transferts F, on en déduit un morphisme canonique

$$Ex_F : a \circ \Omega(F) \to \Omega \circ a(F).$$

Lemme 4.14. — *Le morphisme Ex_F est un isomorphisme.*

Démonstration. — D'après [**Dég07**, 4.4.14], la source et le but de Ex_F sont des faisceau homotopiques. D'après le paragraphe 1.4, il suffit donc de vérifier que Ex_F induit un isomorphisme sur les fibres au point définit par un corps de fonctions E. Par définition du foncteur Ω, on est ramené à montrer l'égalité $aF(\mathbb{G}_m \times_k (E)) = F(\mathbb{G}_m \times_k (E))$. Mais cela résulte de [**Dég07**, 4.4.10] appliqué au préfaisceau homotopique $\hat{p}^* F$ pour $p : \mathrm{Spec}(E) \to \mathrm{Spec}(k)$ (voir 4.2.18 et 4.2.21). $\square$

Si C est un complexe de faisceau avec transferts, on note ΩC le complexe obtenu en appliquant Ω en chaque degré.

Corollaire 4.15. — *Soit C un complexe $\mathbb{A}^1$-local de faisceaux avec transferts. Alors, pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, $\underline{\mathrm{H}}^n(\Omega C) = \underline{\mathrm{H}}^n(C)_{-1}$. Le complexe ΩC est $\mathbb{A}^1$-local.*

Démonstration. — La première assertion est un corollaire du lemme précédent compte tenu du fait que $\underline{\check{\mathrm{H}}}^n$ commute à Ω. La deuxième assertion en résulte. $\square$

En particulier, Ω préserve les quasi-isomorphismes entre complexes motiviques. On en déduit donc un endofoncteur $DM^{eff}(k) \to DM^{eff}(k)$ que l'on note encore Ω.

Corollaire 4.16. — *L'endofoncteur Ω est t-exact. Il induit le foncteur $?_{-1}$ sur le coeur de $DM^{eff}(k)$. Pour tout complexe motivique C,*

$$\Omega(C) = \underline{\mathrm{Hom}}_{DM^{eff}(k)}(T, C).$$

4.17. — Rappelons que le motif de Tate $\mathbb{1}(1)$ dans la catégorie $DM^{eff}(k)$ est définit par : $M(\mathbb{P}^1_k) = \mathbb{1} \oplus \mathbb{1}(1)[2]$. De plus, $L_{\mathbb{A}^1} T = \mathbb{1}(1)[1]$. Il est commode d'introduire la notation redondante $\mathbb{1}\{1\} := \mathbb{1}(1)[1]$. Pour un entier $n \geq 0$, on pose $\mathbb{1}\{n\} = \mathbb{1}\{1\}^{\otimes, n}$ et pour un complexe motivique C, $C\{n\} = \mathbb{1}\{n\} \otimes C$. Notons que l'on peut énoncer le théorème de simplification de Voevodsky [**Voe02**, 4.10] sous la forme suivante :

Théorème 4.18 **(Voevodsky)**. — *Pour tout complexe motivique C, le morphisme d'ajonction*

$$C \to \underline{\mathrm{Hom}}_{DM^{eff}(k)}(\mathbb{1}\{1\}, C\{1\}) = \Omega(C\{1\})$$

est un isomorphisme.

5. Cas stable

5.1. Spectres motiviques. — Avec Denis-Charles Cisinski, nous avons construit dans [**CD09b**, ex. 6.25] la catégorie triangulée monoïdale symétrique fermée $DM(k)$ munie d'une adjonction de catégories triangulées

$$\Sigma^\infty : DM^{eff}(k) \leftrightarrows DM(k) : \Omega^\infty$$

telle que Σ^∞ est monoïdal symétrique et envoie le motif de Tate sur un objet inversible de $DM(k)$ [(19)]. On rappelle ici une construction plus simple de cette catégorie utilisant les spectres non symétriques, dont le défaut est de ne pas fournir de construction directe du produit tensoriel. Nous indiquons pourquoi cette définition simplifiée est équivalente à celle de *loc. cit.* dans la proposition 5.10.

5.1. — De manière analogue à 1.14, on note $\mathbb{N}-Sh^{tr}(k)$ la categorie des faisceaux avec transferts positivement gradués. Elle est abélienne de Grothendieck avec pour générateurs la famille $(\mathbb{Z}^{tr}(X)\{-i\})$ indexée par les schémas lisses X et les entier $i \geq 0$. Elle est de plus monoïdale symétrique (fermée) avec la définition analogue à celle de *loc. cit.* du produit tensoriel, noté ici $\hat{\otimes}^{\mathrm{tr}}$.

Soit T^* le faisceau avec transferts positivement gradué égal à $T^{\otimes^{\mathrm{tr}},n}$ en degré n. C'est un monoïde dans $\mathbb{N}-Sh^{tr}(k)$. La catégorie des modules à gauche sur T^* forme une catégorie abélienne que l'on note T^*–mod. Le foncteur T^*-module libre F_T induit une adjonction de catégories

$$F_T : \mathbb{N}-Sh^{tr}(k) \to T^*-\mathrm{mod} : \mathcal{O}_T \tag{5.1.a}$$

et $\mathcal{O}_T$ est exact, conservatif. Pour un schéma lisse X, et un entier $i \geq 0$, on note $T^*(X)\{-i\}$ l'image de $\mathbb{Z}^{tr}(X)\{-i\}$ par F_T. La catégorie $T^*-\mathrm{mod}$ est abélienne de Grothendieck avec pour générateurs la famille $(T^*(X)\{-i\})$ où X est un schéma lisse et $i \geq 0$ un entier. Notons enfin que pour tout entier $i \in \mathbb{N}$, on dispose encore d'une adjonction

$$F_i : Sh^{tr}(k) \leftrightarrows T^*-\mathrm{mod} : Ev_i \tag{5.1.b}$$

telle que $Ev_i(F_*) = F_i$ et pour tout schéma lisse X, $F_i(\mathbb{Z}^{tr}(X)) = T^*(X)\{-i\}$.

Du fait que le monoïde T^* n'est pas commutatif, la catégorie $T^*-\mathrm{mod}$ n'est pas monoïdale symétrique. On a malgré tout une action à gauche de $Sh^{tr}(k)$ sur T^*–mod par la formule :

$$(G \otimes^{\mathrm{tr}} F_*)_n = G \otimes^{\mathrm{tr}} F_n \tag{5.1.c}$$

la multiplication étant donnée grâce à l'isomorphisme de symétrie du produit tensoriel sur $Sh^{tr}(k)$. Notons enfin que pour tout faisceau avec transferts G, l'endofoncteur $G \otimes^{\mathrm{tr}} ?$ de $T^*-\mathrm{mod}$ admet un adjoint à droite.

5.2. — Un complexe de T^*–mod est appelé un *spectre de Tate*. Un tel objet est donc une famille $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de complexes de faisceaux avec transferts muni de morphismes :

$$\mu_n : T \,\hat{\otimes}^{\mathrm{tr}} E_n \to E_{n+1}.$$

ou encore, de manière équivalente, de morphismes

$$\epsilon_n : E_n \to \Omega E_{n+1}.$$

19. Cette catégorie est la catégorie triangulée monoïdale universelle pour ce problème si l'on se restreint au catégories triangulées qui sont des catégories homotopiques associées à une catégorie de modèles monoïdale (*cf.* [**Hov01**])

La catégorie dérivée de $T^*-\mathrm{mod}$ est bien définie et on obtient à l'aide de (5.1.a) un foncteur conservatif

$$\mathcal{O}_T : \mathrm{D}(T^*-\mathrm{mod}) \to \mathrm{D}(\mathbb{N}-Sh^{tr}(k)). \tag{5.2.a}$$

Soit $(f_n : E_n \to F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un morphisme de spectres de Tate. On dit que f est un fibration (resp équivalence faible) si pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fibration au sens de 4.1 (resp. quasi-isomorphisme).

Lemme 5.3. — *La classe des fibrations et des équivalences faibles définies ci-dessus induisent une structure de catégorie de modèles sur* $\mathrm{C}(T^* - \mathrm{mod})$ *pour laquelle la catégorie homotopique associée est la catégorie* $\mathrm{D}(T^*-\mathrm{mod})$.

Démonstration. — Il s'agit d'un cas particulier de [**Hov01**, 1.14] appliqué à la catégorie de modèles de 4.2 [20]. □

Pour cette structure de catégorie de modèles et celle considérée dans 4.2, le couple de foncteurs (5.1.b) est de manière évidente une adjonction de Quillen qui se dérive donc et induit une adjonction de catégories triangulées :

$$\mathrm{L}F_i : \mathrm{D}(Sh^{tr}(k)) \leftrightarrows \mathrm{D}(T^*-\mathrm{mod}) : \mathrm{R}Ev_i. \tag{5.3.a}$$

Soit X un schéma lisse. Comme $\mathbb{Z}^{tr}(X)$ est cofibrant, $\mathrm{L}F_i(\mathbb{Z}^{tr}(X)) = T^*(X)\{-i\}$. On en déduit donc que pour tout spectre motivique E,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(T^*-\mathrm{mod})}(T^*(X)\{-i\}, E[n]) = H^n(X, E_i). \tag{5.3.b}$$

Par ailleurs, on vérifie en utilisant ces mêmes structures de catégorie de modèles que l'action à gauche de $Sh^{tr}(k)$ sur $T^*-\mathrm{mod}$ définie en (5.1.c) s'étend en une action à gauche de $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$ sur $\mathrm{D}(T^*-\mathrm{mod})$.

5.4. — On peut définir la catégorie dérivée $\mathbb{A}^1$-localisée de $T^*-\mathrm{mod}$ en inversant la classe de flèches $\mathcal{W}_{\mathbb{A}^1}$ engendrée par

$$T^*(\mathbb{A}^1_X)\{-i\} \to T^*(X)\{-i\}$$

pour un schéma lisse X et un entier $i \in \mathbb{Z}$ dans la catégorie $\mathrm{D}(T^*-\mathrm{mod})$. On la note $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(T^*-\mathrm{mod})$. On dispose donc d'un foncteur canonique

$$\pi : \mathrm{D}(T^*-\mathrm{mod}) \to \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(T^*-\mathrm{mod}).$$

On peut considérer la localisation de Bousfield à gauche de la catégorie de modèles sur $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$ définie dans le lemme précédent dont la catégorie homotopique associée est $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(T^*-\mathrm{mod})$ [21]. On l'appelle la catégorie de modèles $\mathbb{A}^1$-locale. On obtient par la théorie des localisations de Bousfield un adjoint à droite du foncteur π

$$\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(T^*-\mathrm{mod}) \to \mathrm{D}(T^*-\mathrm{mod})$$

qui est pleinement fidèle et dont l'image essentielle s'identifie aux objets $\mathcal{W}_{\mathbb{A}^1}$-locaux, que l'on appelle spectres $\mathbb{A}^1$-locaux. Compte tenu de (5.3.b), un spectre motivique

20. On peut aussi utiliser [**CD09b**, 1.7] avec la bonne structure de descente.
21. Ce qui est une façon de montrer que la catégorie localisée $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(T^*-\mathrm{mod})$ est bien définie.

$(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $\mathbb{A}^1$-local si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le complexe E_n est $\mathbb{A}^1$-local. Il est immédiat que l'adjonction (5.3.a) passe aux catégories $\mathbb{A}^1$-localisées et induit

$$\mathrm{L}_{\mathbb{A}^1} F_i : DM^{eff}(k) \leftrightarrows \mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(T^*-\mathrm{mod}) : \mathrm{R}_{\mathbb{A}^1} Ev_i. \tag{5.4.a}$$

5.5. — Pour tout schéma lisse X et tout entier $i \geq 0$, on obtient (en utilisant la symétrie du produit tensoriel sur $Sh^{tr}(k)$) un morphisme canonique de faisceaux gradués

$$\left(T \otimes^{\mathrm{tr}} T^*(X)\right)\{-i-1\} \to T^*(X)\{-i\}$$

compatible à la structure de T^*-module. Notons $\mathcal{W}_{\mathfrak{G}}$ la classe de flèches induites dans la catégorie des spectres de Tate.

Définition 5.6. — On note $DM(k)$ la localisation de la catégorie $\mathrm{D}_{\mathbb{A}^1}(T^*-\mathrm{mod})$ par rapport à la classe de flèches $\mathcal{W}_{\mathfrak{G}}$.

En utilisant à nouveau une localisation de Bousfield à gauche de la catégorie de modèles $\mathbb{A}^1$-locale sur $\mathrm{C}(T^*-\mathrm{mod})$ par rapport à $\mathcal{W}_{\mathfrak{G}}$, on obtient la catégorie de modèles dite *stable* sur $\mathrm{C}(T^*-\mathrm{mod})$. Il est immédiat que celle-ci coïncide avec celle introduite par Hovey dans [**Hov01**, 3.3] à partir de la catégorie de modèles $\mathbb{A}^1$-locale sur $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$. Appliquant [**Hov01**, 3.4], on en déduit qu'un spectre de Tate (E_n) est fibrant pour la structure stable si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, le complexe E_n est Nisnevich fibrant, $\mathbb{A}^1$-local et le morphisme structural $E_n \to \Omega E_{n+1}$ est un quasi-isomorphisme.

Définition 5.7. — Un spectre de Tate (E_n) est appelé un *spectre motivique* si pour tout $n \in \mathbb{Z}$, E_n est $\mathbb{A}^1$-local et si le morphisme structural $E_n \to \Omega E_{n+1}$ est un quasi-isomorphisme.

La catégorie $DM(k)$ est donc équivalente à la sous-catégorie pleine de $\mathrm{D}(T^*-\mathrm{mod})$ formée des spectres motiviques. On considèrera désormais que les objets de $DM(k)$ sont des spectres motiviques.

L'adjonction (5.4.a) pour $i = 0$ permet de définir une adjonction

$$\Sigma^\infty : DM^{eff}(k) \leftrightarrows DM(k) : \Omega^\infty, \tag{5.7.a}$$

qui n'est autre que l'adjonction dérivée de (5.1.b) pour $i = 0$. Puisqu'un spectre motivique (E_n) est fibrant pour la structure de catégorie de modèles précédente, on en déduit que le foncteur Ω^∞ associe à (E_n) le complexe motivique E_0.

5.8. — Soit C un complexe motivique, et $C' \to C$ une résolution cofibrante au sens de la catégorie de modèles 4.8. On peut donner la description suivante du foncteur Σ^∞ : pour un entier $n \geq 0$, on définit a priori le foncteur Σ^∞ en posant

$$(\Sigma^\infty C)_n = C\{n\}, n \geq 0$$

où $C\{n\}$ désigne le complexe motivique

$$L_{\mathbb{A}^1}(C \otimes^{\mathrm{tr,L}} T^n) = L_{\mathbb{A}^1}(C' \otimes^{\mathrm{tr}} T^n)$$

conformément à la notation 4.17. On définit de plus une structure de spectre de Tate sur $\Sigma^\infty C$ grâce au morphisme d'adjonction suivant, pour un entier $n \geq 0$,

$$C\{n\} \to \Omega(C\{n+1\}).$$

Il résulte du théorème de simplification 4.18 que $\Sigma^\infty C$ est alors un spectre motivique. Par définition, $\Sigma^\infty C$ est donc une résolution fibrante du spectre de Tate $F_0(C')$, ce qui montre qu'il coincide avec l'adjoint à gauche de (5.7.a). De cette description, on déduit que le morphisme d'adjonction

$$C \to \Omega^\infty \Sigma^\infty C$$

est un isomorphisme : le foncteur Σ^∞ est pleinement fidèle.

5.9. — L'action à gauche de la catégorie monoïdale $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$ sur $\mathrm{D}(T^*\text{–mod})$ peut être étendue en une action à gauche de $DM^{eff}(k)$ sur $DM(k)$. D'après [**Hov01**, 3.8], l'action du complexe motivique $\mathbb{1}\{1\}$ sur $DM(k)$ est inversible et le foncteur quasi-inverse est induit par le foncteur de décalage qui à un Ω-spectre E associe le spectre motivique $E\{-1\}$ - qui est encore un spectre motivique.

Proposition 5.10. — *La catégorie $DM(k)$ introduite ici ainsi que l'adjonction* (5.7.a) *coïncident avec celles de* [**CD09b**, ex. 6.25].

Il en résulte que la catégorie triangulée $DM(k)$ est munie d'une structure monoïdale symétrique fermée telle que le foncteur Σ^∞ est monoïdal symétrique. Par rapport au cas général traité dans *loc. cit.* on a obtenu ici que le foncteur Σ^∞ est pleinement fidèle en utilisant le théorème de simplification 4.18.

Démonstration. — Il s'agit essentiellement de comparer la construction de $DM(k)$ donnée ici par les spectres motiviques avec celle *loc. cit.* donnée par les spectres motiviques symétriques. D'après la preuve du lemme 1.10, il existe une $\mathbb{A}^1$-équivalence d'homotopie forte entre la permutation cyclique des facteurs de T^3 et l'identité dans la catégorie $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$. Il en résulte que T est un objet symétrique de la catégorie de modèle $\mathbb{A}^1$-locale $\mathrm{C}(Sh^{tr}(k))$ au sens de la définition [**Hov01**, 9.2]. Dès lors, on peut appliquer [**Hov01**, 9.4] ce qui permet de conclure. □

5.11. — Notons pour terminer que le foncteur pleinement fidèle monoidal $DM^{eff}_{gm}(k) \to DM^{eff}(k) \to DM(k)$ s'étend par propriété universelle en un foncteur pleinement fidèle monoidal

$$DM_{gm}(k) \to DM(k).$$

L'image essentielle de ce foncteur coïncide avec la catégorie des objets compacts de $DM(k)$ d'après [**CD09b**].

5.2. t-structure homotopique. —

5.12. — Soit $E = (E_n, \epsilon_n : E_n \to \Omega E_{n+1})_{n\geq 0}$ un spectre motivique. On lui associe un unique module homotopique $\underline{H}^0_*(M)$ tel que pour tout $n \geq 0$, $\underline{H}^0_n(E) = \underline{\mathrm{H}}^0(E_n)$ avec la notation de (4.12.a) et avec pour morphismes structuraux

$$\underline{\mathrm{H}}^0(E_n) \xrightarrow{H^0(\epsilon_n)} \underline{\mathrm{H}}^0(\Omega E_{n+1}) = [\underline{\mathrm{H}}^0(E_{n+1})]_{-1}$$

en appliquant le corollaire 4.15. La graduation négative de $\underline{H}^0_n(E)$ est définie de manière tautologique. Pour tout entier $m \in \mathbb{Z}$, on pose $\underline{H}^m_*(E) = \underline{H}^0_*(E[m])$.

Lemme 5.13. — *Les foncteurs définis ci-dessus vérifient les propriétés suivantes :*

(i) *Le foncteur $\underline{H}^0_* : DM(k) \to HI_*(k)$ est un foncteur cohomologique qui commute aux sommes quelconques.*

(ii) *La famille de foncteurs $(\underline{H}^m_*)_{m\in\mathbb{Z}}$ est conservative.*

Démonstration. — La catégorie $\mathrm{D}(\mathbb{N}{-}Sh^{tr}(k))$ porte naturellement une t-structure, puisque $\mathbb{N}{-}Sh^{tr}(k)$ est abélienne. On note $\underline{\tilde{H}}^0_*$ le foncteur cohomologique associé. Par définition, on obtient un carré commutatif

$$\begin{tikzcd} DM(k) \arrow[r, "(2)"] \arrow[d, "\underline{H}^0_*"'] & \mathrm{D}(\mathbb{N}{-}Sh^{tr}(k)) \arrow[d, "\underline{\tilde{H}}^0_*"] \\ HI_*(k) \arrow[r, "(1)"] & \mathbb{N}{-}Sh^{tr}(k). \end{tikzcd}$$

où la flèche (1) est la flèche d'oubli évidente et la flèche (2) est induite par le foncteur (5.2.a). D'après 1.16, le foncteur (1) est exact et conservatif. Dès lors, comme $\underline{\tilde{H}}^0_*$ envoie les triangles distingués sur des suites exactes longues, il en est de même de $\underline{H}^0_*$. Le fait que $\underline{H}^0_*$ commute aux sommes infinies est maintenant évident, ce qui implique (i). L'assertion (ii) résulte maintenant du fait que (2) est conservatif et du fait que $\underline{\tilde{H}}^0_*$ est le foncteur cohomologique d'une t-structure sur $\mathrm{D}(\mathbb{N}{-}Sh^{tr}(k))$. □

On dit qu'un spectre motivique est positif (resp. négatif) si pour tout $n < 0$ (resp. $n > 0$), $\underline{H}^n_*(E) = 0$. Soit $\tau_{\leq 0}$ le foncteur de troncation négative pour la t-structure homotopique sur $DM^{eff}(k)$. On vérifie en utilisant à nouveau le corollaire 4.15 que l'application de $\tau_{\leq 0}$ degré par degré à un spectre motivique E définit un spectre motivique négatif $\tau_{\leq 0}E$, avec un morphisme canonique :

$$\tau_{\leq 0}E \to E.$$

Corollaire 5.14. — *La catégorie $DM(k)$, munie de la notion d'objets négatifs et positifs introduite ci-dessus, est une t-structure dont le foncteur de troncation négatif est le foncteur $\tau_{\leq 0}$ introduit ci-dessus et dont le foncteur cohomologique associé est le foncteur $\underline{H}^0_*$.*

On appelle cette t-structure la t-structure homotopique sur $DM(k)$. Notons que d'après la définition de 5.12, le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} DM(k) \arrow[r, "\underline{\mathrm{H}}^0_*"] \arrow[d, "\Omega^\infty"'] & HI_*(k) \arrow[d, "\omega^\infty"] \\ DM^{eff}(k) \arrow[r, "\underline{\mathrm{H}}^0"] & HI(k). \end{tikzcd}$$

Il en résulte que Ω^∞ est t-exact.

5.3. Coeur homotopique. —

5.15. — D'après la construction précédente, la catégorie des modules homotopiques $HI_*(k)$ est le coeur de $DM(k)$ pour la t-structure homotopique.

Avec les notations de la première partie, le module homotopique représenté par un schéma lisse X est égal à $h_{0,*}(X) = \underline{\mathrm{H}}^0_*(M(X))$. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, on obtient aussi une identification de modules homotopiques $h_{0,*}(X)\{n\} = \underline{\mathrm{H}}^0_* \left(M(X)\{n\}\right)$ (22).

Notons plus généralement que tout schéma algébrique X définit d'après [**Voe00b**] un complexe motivique $\underline{\mathrm{C}}^*_{\mathrm{sing}}\, \mathbb{Z}^{tr}(X)$. Pour tout entier $i \geq 0$, on obtient un module homotopique :

$$h_{i,*}(X) := \underline{\mathrm{H}}^{-i}_*(\Sigma^\infty\, \underline{\mathrm{C}}^*_{\mathrm{sing}}\, \mathbb{Z}^{tr}(X)).$$

Si E est un spectre motivique, on lui associe pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$ un module de cycles $\underline{\hat{\mathrm{H}}}^p_*(E)$ obtenu en appliquant le foncteur *transformée générique* de 3.4 au module homotopique $\underline{\mathrm{H}}^p_*(E)$. Pour tout corps de fonction L, et tout entier $n \in \mathbb{Z}$,

$$\underline{\hat{\mathrm{H}}}^p_n(E).L = \varinjlim_{A \subset L} \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(\mathrm{Spec}(A)), E\{n\}[p]).$$

Compte tenu du théorème 3.4, on obtient donc le corollaire suivant :

Corollaire 5.16. — *La catégorie des modules de cycles est le coeur de la t-structure homotopique sur $DM(k)$, via le foncteur $\underline{\hat{\mathrm{H}}}^0_*$.*

Ainsi, on peut associer à tout schéma algébrique X et tout entier $i \in \mathbb{N}$ un module de cycles $\hat{h}_{i,*}(X)$. Pour tout corps de fontions L, le gradué de degré 0 de ce module de cycles est donné par l'homologie de Suslin de X :

$$\hat{h}_{i,0}(X).L = H^{sing}_i(X_L/L)$$

avec les notations de [**SV96**].
Si X est projectif lisse connexe de dimension d, le motif $M(X) = \Sigma^\infty\, \underline{\mathrm{C}}^*_{\mathrm{sing}}\, \mathbb{Z}^{tr}(X)$ dans $DM(k)$ est fortement dualisable avec pour dual fort $M(X)(-d)[-2d]$ d'après [**Dég08a**, 2.16]. Il en résulte que pour tout corps de fonctions L,

$$\hat{h}_{i,n}(X).L = H^{2d+i+n,d+n}_{\mathcal{M}}(X_L), \tag{5.16.a}$$

22. On fera attention à la confusion possible introduite par cette notation : étant donné un module homotopique F_* et un entier $n > 0$, l'objet twisté $F_*\{n\}$ n'est pas le même s'il est calculé dans la catégorie $HI_*(k)$ ou $DM(k)$. C'est pourquoi on précise ici que $h_{0,*}(X)\{n\}$ est considéré comme un module homotopique.

où $H^{s,t}_{\mathcal{M}}(X_L)$ désigne la cohomologie motivique de X étendu à L en degré s et twist t.

5.17. — Considérons un corps de fonctions L et un entier $n \in \mathbb{Z}$. On lui associe un pro-objet de $HI_*(k)$:

$$h_{0,*}(L)\{n\} = \text{"}\varprojlim_{A\subset L}\text{"}\ h_{0,*}(\mathrm{Spec}(A))\{n\},$$

où A parcourt l'ensemble ordonné filtrant des sous-k-algèbres de type fini de L dont le corps des fractions est L.

Lemme 5.18. — *Pour tout spectre motivique E, et tout entier $i \in \mathbb{Z}$,*

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}-DM(k)}(M(L)\{n\}, E[i]) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{pro}-HI_*(k)}(h_0(L)\{n\}, \underline{\mathrm{H}}^i_*(E)).$$

Utilisant le théorème de simplification, on se réduit au cas effectif qui résulte de [**Dég08a**, 3.4.4] – il s'agit essentiellement du fait que le pro-objet (L) est un point pour la topologie de Nisnevich.

Notons $HI^{(0)}(k)$ la sous-catégorie pleine de pro–$HI_*(k)$ formée des objets de la forme $h_{0,*}(L)\{n\}$ pour un corps de fonctions L et un entier $n \in \mathbb{Z}$. Alors, d'après le lemme précédent, le foncteur canonique

$$DM^{(0)}_{gm}(k) \to HI^{(0)}(k), M(L)\{n\} \mapsto \underline{\mathrm{H}}^0_*(M(L)\{n\})$$

est une équivalence de catégories [(23)].

Ainsi, les motifs génériques apparaissent comme des pro-objets de la catégorie abélienne $HI_*(k)$, qui définissent des foncteurs fibres de cette catégorie (*i.e.* exacts, commutant aux sommes infinies). Cette interprétation des motifs génériques est donc très proche de la notion de points d'un topos. La transformée générique d'un module homotopique F_* est finalement donnée par la *restriction de F_* à cette catégorie de points.*

Remarque 5.19. — Notons que les morphismes de spécialisations correspondants aux données (D1) à (D4) des modules de cycles sont donc définis dans la catégorie abélienne des pro-modules homotopiques. A titre d'illustration, considérons un corps de fonctions valué (L, v). Soit κ_v son corps résiduel et $\varphi : \mathcal{O}_v \to L$ l'inclusion de son anneau des entiers. On obtient par application du fonteur H^0_* au triangle de Gysin une suite exacte courte dans pro–$HI_*(k)$:

$$h_{0,*}(\kappa_v)\{1\} \xrightarrow{\partial_v} h_{0,*}(L) \xrightarrow{\varphi^*} h_{0,*}(\mathcal{O}_v) \to 0.$$

6. Suite spectrale de Gersten et t-structure homotopique

6.1. — Soit $\mathscr{A}$ une catégorie abélienne.

23. Le cas effectif avait déjà été traité dans [**Dég08b**, 3.4.7].

Rappelons qu'un couple exact dans $\mathscr{A}$ est la donnée d'objets bigradués $E_1^{p,q}$ et $D_1^{p,q}$, pour des indices $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$ et des morphismes homogènes

$$\begin{tikzcd}
D_1 \arrow[rr, "(1,-1)", "\alpha"'] & & D_1 \arrow[dl, "\beta"', "(0,0)"] \\
& E_1 \arrow[ul, "\gamma"', "(1,0)"] &
\end{tikzcd}$$

dont les bidegrés sont indiqués sur le diagramme. Rappelons (*cf.* [**McC01**, 2.3]) que l'on associe à un tel couple exact une suite spectrale dont la première page est $E_1^{p,q}$ avec pour différentielles les morphismes $d_1 = \gamma \circ \beta$.

Considérons maintenant un complexe K de $\mathscr{A}$. On suppose donnés pour tout entier $p \in \mathbb{Z}$ les complexes et morphismes suivants :

(6.1.a)
$$\begin{tikzcd}
& F^{p+1}K \arrow[rr, hook, "f^p"] \arrow[dl, hook, "i^{p+1}"'] & & F^pK \arrow[dl, two heads, "\pi^p"] \arrow[dr, hook, "i^p"] & \\
K \arrow[dr, two heads, "k^{p+1}"'] & & G^pK \arrow[dl, hook, "\tilde{\pi}^p"'] & & K \arrow[dl, two heads, "k^p"] \\
& T^{p+1}K \arrow[rr, two heads, "\tilde{f}^p"'] & & T^pK &
\end{tikzcd}$$

On demande que pour tout $p \in \mathbb{Z}$, les couples (i^p, k^p), (f^p, π^p), $(\tilde{f}^p, \tilde{\pi}^p)$ forment des suites exactes courtes dans la catégorie abélienne $\mathrm{C}(\mathscr{A})$. On notera en particulier que F^*K (resp. T^*K) définit une filtration (resp. cofiltration) de K. Bien entendu, l'une détermine l'autre.

Il en résulte que, passant à la catégorie dérivée $\mathscr{T} := \mathrm{D}(\mathscr{A})$, on obtient le diagramme suivant

(6.1.b)
$$\begin{tikzcd}
& F^{p+1}K \arrow[rr, "f^p"] \arrow[dl, "i^{p+1}"'] \arrow[d, phantom, ""] & & F^pK \arrow[dl, "\pi^p"] \arrow[dr, "i^p"] & \\
K \arrow[r, phantom, "*"] \arrow[dr, "k^{p+1}"'] & {} & G^pK \arrow[ul, "+1"'] \arrow[dl, "\tilde{\pi}^p"'] \arrow[u, phantom, "*"] \arrow[d, phantom, "*"] & {} \arrow[r, phantom, "*"] & K \arrow[dl, "k^p"] \\
& T^{p+1}K \arrow[uu, "+1"] \arrow[rr, "\tilde{f}^p"'] & & T^pK \arrow[uu, "+1"'] \arrow[ul, "+1"] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les triangles marqués d'une étoile sont distingués et les autres sont commutatifs. Autrement dit, on obtient un *octaèdre* dans la catégorie triangulée $\mathscr{T}$.

Supposons donné par ailleurs un foncteur (co)homologique $\varphi : \mathrm{D}(\mathscr{A}) \to \mathscr{B}$, et posons $\varphi^n = \varphi(.[n])$. On peut alors définir des objets bigradués :

$$D_1^{p,q} = \varphi^{p+q}(F^pK), \tilde{D}_1^{p,q} = \varphi^{p+q}(T^{p+1}K), E_1^{p,q} = \varphi^{p+q}(G^pK), E_\infty^{p,q} = \varphi^{p+q}(K).$$

pour $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. Par application du foncteur cohomologique φ au diagramme précédent, on obtient un diagramme commutatif d'objets bigradués, formé de morphismes homogènes,

$$\begin{tikzcd}
 & D_1 \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dl] & & D_1 \arrow[dl, "\beta"] \arrow[dr] & \\
E_\infty \arrow[dr] & & E_1 \arrow[ul, "\gamma"'] \arrow[dl, "\tilde{\gamma}"] \arrow[u, phantom, "(1)"] \arrow[d, phantom, "(2)"] & & E_\infty \arrow[dl] \\
 & \tilde{D}_1 \arrow[uu, "r"] \arrow[rr, "\tilde{\alpha}"'] & & \tilde{D}_1 \arrow[uu, "r"'] \arrow[ul, "\tilde{\beta}"'] &
\end{tikzcd}$$

dans lequel les triangles (1) et (2) forment un couple exact (avec les conventions rappelées ci-dessus). Ce diagramme commutatif (24) montre que les suites spectrales associées respectivement à (1) et (2) sont *égales* — l'assertion concernant les différentielles de la première page est par exemple immédiate. Notons enfin que lorsque la filtration F^*K est bornée (25) (ou ce qui revient au même T^*K), le terme à l'infini de cette suite spectrale est ce que nous avons noté E_∞ et la suite spectrale converge.

Remarque 6.2. — 1. Un cas particulier fondamental est celui où le foncteur φ est le foncteur (co)homologique $H^0 : \mathrm{D}(\mathscr{A}) \to \mathscr{A}$ canonique. La suite spectrale obtenue ci-dessus est alors la suite spectrale du complexe filtré (K, F^*K) (*cf.* [**Del71**]).

2. Suivant la construction ci-dessus, on reconnait donc dans la donnée d'un système de Rees la trace d'un octaèdre, en l'occurence le diagramme (6.1.b).
3. Plus généralement, c'est la famille des diagrammes (6.1.b) qui est fondamentale pour définir la suite spectrale précédente. Ainsi, le procédé décrit ci-dessus à partir de ces diagrammes a un sens dans nimporte quelle catégorie triangulée, indépendamment de la manière dont on a donné naissance à ces diagrammes. Si on se place par ailleurs dans une catégorie ≪ triangulée enrichie ≫ $\mathscr{T}$ – c'est-à-dire une ∞-catégorie stable dans le sens de [**Lur08**], comme par exemple la catégorie homotopique d'une DG-catégorie, ou encore la catégorie homotopique d'une catégorie de modèles stable – on peut associer canoniquement à la donnée des morphismes (f^p, i^p) (resp. $(\tilde{f}^p, \tilde{i}^p)$), des diagrammes du type (6.1.b) en utilisant le foncteur *cofibre homotopique* (resp. *fibre homotopique*).
4. Remarquons que tout foncteur triangulé $\psi : \mathscr{T}' \to \mathscr{T}$ envoie une famille de diagrammes (6.1.b) sur une famille du même type. En général, le foncteur (co)homologique φ se décompose en $H^0 \circ \psi$ où ψ est un foncteur triangulé et H^0 est le foncteur (co)homologique d'une t-structure donnée sur $\mathscr{T}$. Dans le cadre qui suit, ψ est un foncteur dérivé (à droite). Les catégories $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}'$ sont les catégories homotopiques de catégories de modèles stables. Il y a lieu dans ce cas de remplacer l'hypothèse que $\tilde{f}^p$ est induit par un épimorphisme

24. On reconnaitra un cas particulier de ≪ système de Rees ≫ suivant la terminologie introduite par Eilenberg et Moore (*cf.* [**McC01**, 3.1]).
25. Il est probable si la suite spectrale dégénère en (p,q), $E_r^{p,q} \simeq E_\infty^{p,q}$ pour $r >> 0$.

de complexes par l'hypothèse que c'est une fibration (26) pour la catégorie de modèles sous-jacente à $\mathscr{T}$. Ce cadre correspond à une « tour de fibrations » et à la suite spectrale qui lui est associée en topologie algébrique. La question de la convergence de cette suite spectrale est alors reliée au problème de savoir si la flèche canonique

$$K \to \mathrm{holim}_{p\in\mathbb{Z}} T^p K$$

est une équivalence faible.

Remarquons que dualement, si ψ est un foncteur dérivé à gauche, il y a lieu de supposer que f^p est une cofibration ; ce cas correspond dans le cadre d'une catégorie de modèles abstraite au cas particuliers des complexes filtrés dans une catégorie dérivée. Dans ce cas, la convergence est reliée à la flèche canonique

$$\mathrm{hocolim}_{p\in\mathbb{Z}} F^p K \to K.$$

6.3. — Pour les deux prochains exemples, on fixe un schéma lisse X et un spectre motivique $\mathbb{E}$. On pose $\mathbb{E}_0 = \Omega^\infty \mathbb{E}$ vu comme complexe de faisceau Nisnevich sur $\mathscr{L}_k$.
Suite spectrale n°1.– La t-structure homotopique sur $DM(k)$ permet d'obtenir un diagramme du type (6.1.b) dans la catégorie triangulée $DM(k)$:

$$\begin{tikzcd}
 & \tau_{\leq -p-1}\mathbb{E} \arrow[rr] \arrow[dl] & & \tau_{\leq -p}\mathbb{E} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\mathbb{E} \arrow[dr] \arrow[r, phantom, "*"] & {} & \underline{\mathrm{H}}^{-p}_*(\mathbb{E})[p] \arrow[ul, "+1"'] \arrow[dl] \arrow[u, phantom, "*"] \arrow[d, phantom, "*"] & {} & \mathbb{E} \arrow[dl] \arrow[l, phantom, "*"] \\
 & \tau_{>-p-1} \arrow[uu, "+1"] \arrow[rr] & & \tau_{>-p-1} \arrow[uu, "+1"'] \arrow[ul, "+1"'] &
\end{tikzcd}$$

Si X est un schéma lisse, on obtient donc après application du foncteur (co)homologique $\mathrm{Hom}(M(X),.)$ un couple exact et une suite spectrale :

$$'E^{p,q}_{1,t} = \mathrm{Hom}(M(X), \underline{\mathrm{H}}^{-p}_*(\mathbb{E})[2p+q]) \Rightarrow \mathrm{Hom}(M(X), \mathbb{E}[p+q])$$

qui est la suite spectrale d'hypercohomologie associée à la t-structure homotopique.

Suivant l'usage, on renumérote cette suite spectrale pour qu'elle commence au terme E_2 suivant la règle $E^{p,q}_{2,t} = {}'E^{-q,p+2q}_{1,t}$. Un petit calcul donne alors la forme finale suivante pour cette suite spectrale :

$$E^{p,q}_{2,t} = H^p(X, \underline{\mathrm{H}}^q_0\,\mathbb{E}) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{E}_0).$$

Remarquons que cette suite spectrale est convergente puisqu'elle est concentrée dans la colonne $0 \leq p \leq \dim X$.
Suite spectrale n°2.– Rappelons (27) qu'un drapeau de X est une suite décroissante $(Z^p)_{p\in\mathbb{N}}$ de sous-schémas fermés de X telle que $\mathrm{codim}_X(Z^p) \geq p$. L'ensemble des drapeaux de X, ordonné par l'inclusion termes à termes, est filtrant. Etant donné un

26. On voir alors G^p comme la cofibre homotopique de $\tilde{f}^p$, qui est un objet fibrant. L'avantage est qu'il n'y a alors par lieu de dériver le foncteur de Quillen à droite sous-jacent à ψ.

27. Cette définition est classique ; on se réfère à [**Dég08b**, section 3], pour plus de détails.

tel drapeau, on peut considérer le diagramme suivant dans la catégorie des faisceaux avec transferts :

$$\begin{tikzcd}
 & \mathbb{Z}^{tr}(X - Z^p) \arrow[dl, hook', "i_{p*}"'] \arrow[rr, hook, "f_{p*}"] & & \mathbb{Z}^{tr}(X - Z^{p+1}) \arrow[dl, "\pi_p"] \arrow[dr, hook, "i_{p+1*}"] & \\
\mathbb{Z}^{tr}(X) \arrow[dr, two heads, "k_p"'] & & \mathbb{Z}^{tr}(X - Z^{p+1}/X - Z^p) \arrow[dl, hook', "\tilde{\pi}_p"'] & & \mathbb{Z}^{tr}(X) \arrow[dl, two heads, "k_{p+1}"] \\
 & \mathbb{Z}^{tr}(X/X - Z^p) \arrow[rr, two heads, "\tilde{f}_p"'] & & \mathbb{Z}^{tr}(X/X - Z^{p+1}) &
\end{tikzcd}$$

Les morphismes f^p et i^p désignent les immersions ouvertes canoniques. On obtient donc un diagramme du type (6.1.a), à ceci près que la filtration donnée par f_{p*} est décroissante. Ce diagramme est naturellement fonctoriel (contravariant) par rapport à l'inclusion des drapeaux. Il induit donc un diagramme commutatif du type (6.1.b) dans la catégorie $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k))$. En prenant son image par le foncteur triangulé $\mathrm{D}(Sh^{tr}(k)) \to DM^{eff}(k) \to DM(k)$, on obtient donc un diagramme de la forme suivante :

$$\begin{tikzcd}
 & M(X - Z^p) \arrow[dl, "i_{p*}"'] \arrow[rr, "f_{p*}"] & & M(X - Z^{p+1}) \arrow[dl, "\pi_p"] \arrow[dr, "i_{p+1*}"] & \\
M(X) \arrow[dr, "k_p"'] \arrow[r, phantom, "*"] & {} & M(X - Z^{p+1}/X - Z^p) \arrow[ul, "+1"'] \arrow[dl, "\tilde{\pi}_p"'] \arrow[u, phantom, "*"] \arrow[d, phantom, "*"] & {} & M(X) \arrow[dl, "k_{p+1}"] \arrow[l, phantom, "*"] \\
 & M(X/X - Z^p) \arrow[uu, "+1"] \arrow[rr, "\tilde{f}_p"'] & & M(X/X - Z^{p+1}) \arrow[uu, "+1"'] \arrow[ul, "+1"] &
\end{tikzcd}$$

Considérons un spectre motivique $\mathbb{E}$. Appliquant le foncteur $\mathrm{R}\operatorname{Hom}_{DM(k)}(.,\mathbb{E})$ au diagramme précédent, on obtient un diagramme dans la catégorie triangulée $\mathrm{D}(\mathscr{A}b)$ qui est précisément de la forme (6.1.b) où l'on a posé :

$$\begin{aligned}
K &= \mathrm{R}\operatorname{Hom}(M(X),\mathbb{E}), & F^pK &= \mathrm{R}\operatorname{Hom}(M(X/X - Z^p),\mathbb{E}),\\
T^pK &= \mathrm{R}\operatorname{Hom}(M(X - Z^p),\mathbb{E}), & G^pK &= \mathrm{R}\operatorname{Hom}(M(X - Z^{p+1}/X - Z^p),\mathbb{E}).
\end{aligned}$$

Le diagramme ainsi obtenu est naturel covariant par rapport aux inclusions de drapeaux. Comme les limites inductives filtrantes sont exactes dans $\mathrm{D}(\mathscr{A}b)$, on en déduit un diagramme de la forme (6.1.b) avec :

$$\begin{aligned}
K &= \mathrm{R}\operatorname{Hom}(M(X),\mathbb{E}),\\
F_c^pK &= \varinjlim_{Z^* \in \mathrm{Drap}(X)} \mathrm{R}\operatorname{Hom}(M(X/X - Z^p),\mathbb{E})\\
T_c^pK &= \varinjlim_{Z^* \in \mathrm{Drap}(X)} \mathrm{R}\operatorname{Hom}(M(X - Z^p),\mathbb{E}),\\
G_c^pK &= \varinjlim_{Z^* \in \mathrm{Drap}(X)} \mathrm{R}\operatorname{Hom}(M(X - Z^{p+1}/X - Z^p),\mathbb{E}).
\end{aligned}$$

Après application du foncteur cohomologique canonique, on en déduit donc une suite spectrale :

$$E_{1,c}^{p,q} = \varinjlim_{Z^* \in \mathrm{Drap}(X)} \mathbb{E}^{p+q}(X - Z^{p+1}/X - Z^p) \Rightarrow \mathbb{E}^{p+q}(X)$$

qui n'est autre que le suite spectrale du coniveau associée à la théorie cohomologique représentée par $\mathbb{E}$ (voir [**BO74**] pour la référence originale). Notons que cette suite spectrale est convergente puisqu'un drapeau de X est de longeur bornée par la dimension de X.

Dans [**Dég08b**, 4.5], on démontre qu'il existe un isomorphisme canonique de complexes de groupes abéliens :

$$E_{1,c}^{*,q} \simeq C^*(X, \underline{\hat{\mathrm{H}}}_*^q(\mathbb{E}))_0$$

où le membre de droite est le complexe de cycles (en degré 0) à coefficients dans le module de cycles $\underline{\hat{\mathrm{H}}}_*^q(\mathbb{E})$ (*cf.* corollaire 5.16).

On obtient donc la forme suivante de la suite spectrale du coniveau :

$$E_{2,c}^{p,q} = A^p(X, \underline{\hat{\mathrm{H}}}_*^q(\mathbb{E}))_0 \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbb{E}_0)$$

D'après la proposition 3.6, on en déduit donc un isomorphisme

$$\varphi_2^{p,q} : E_{2,t}^{p,q} \to E_{2,c}^{p,q}.$$

Théorème 6.4. — *La famille d'isomorphismes $\varphi_2^{p,q}$ est compatible aux différentielles des deux suites spectrales définies ci-dessus.*

De plus, elle induit de proche en proche des isomorphismes compatibles aux différentielles $\varphi_r^{p,q} : E_{r,t}^{p,q} \to E_{r,c}^{p,q}$ pour tout $r \geq 2$.

Démonstration. — Puisque les deux suites spectrales sont concentrées en degrés $0 \leq p \leq \dim X$, on peut supposer que E est borné inférieurement pour la t-structure homotopique.

Soit X_{Nis} le site des X-schémas étales muni de la topologie de Nisnevich. Soit $\tilde{X}_{\mathrm{Nis}}$ la catégorie des faisceaux abéliens sur X_{Nis}. Si V/X est un schéma étale, on note $\mathbb{Z}_X(V)$ le faisceau de groupes abéliens libres sur X_{Nis} représenté par V.
Soit K la restriction de $\mathbb{E}_0$ à X_{Nis}. Par hypothèse, K est borné inférieurement. Il existe donc une résolution de Cartan-Eilenberg $I \to K$ où I est un complexe quasi-isomorphe à K, dont les composantes sont des objets injectifs de $\tilde{X}_{\mathrm{Nis}}$. Ainsi, pour tout X-schéma étale V, on dispose d'un isomorphisme canonique :

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}(\tilde{X}_{\mathrm{Nis}})}(\mathbb{Z}_X(V), I[n]) \to \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(V), \mathbb{E}[n]). \tag{6.4.a}$$

Puisque le foncteur de restriction à X_{Nis} est exact, la suite spectrale $E_{2,t}^{p,q}$ est canoniquement isomorphe à la suite spectrale d'hypercohomologie Nisnevich du complexe I – *i.e.* associée au foncteur cohomologique $\mathrm{R}\Gamma$, foncteur dérivé du foncteur sections globales.

Soit $(Z^p)_{p\in\mathbb{N}}$ un drapeau de X. On obtient alors un diagramme du type (6.1.a) dans la catégorie $\tilde{X}_{\mathrm{Nis}}$:

$$\begin{tikzcd}
& \mathbb{Z}_X(X-Z^p) \arrow[rr, hook, "f_{p*}"] \arrow[dl, hook', "i_{p*}"'] & & \mathbb{Z}_X(X-Z^{p+1}) \arrow[dl, two heads, "\pi_p"] \arrow[dr, hook, "i_{p+1*}"] & \\
\mathbb{Z}_X(X) \arrow[dr, two heads, "k_p"'] & & \mathbb{Z}_X(X-Z^{p+1}/X-Z^p) \arrow[dl, hook', "\tilde{\pi}_p"'] & & \mathbb{Z}_X(X) \arrow[dl, two heads, "k_{p+1}"] \\
& \mathbb{Z}_X(X/X-Z^p) \arrow[rr, two heads, "\tilde{f}_p"'] & & \mathbb{Z}_X(X/X-Z^{p+1}) &
\end{tikzcd}$$

Ce digramme donne lieu à son tour à une octaèdre (du type (6.1.b)) dans la catégorie dérivée $\mathrm{D}(\tilde{X}_{\mathrm{Nis}})$. D'après (6.4.a), la suite spectrale associée à ce dernier diagramme pour le foncteur cohomologique $\mathrm{Hom}(.,I)$ est canoniquement isomorphe à la suite spectrale $E_{1,c}^{p,q}$. Notons $F_c^p(I)$ le noyau de l'épimorphisme

$$I=\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_X(X),I)\xrightarrow{i_p^*}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_X(X-Z^{p+1}),I)$$

et posons $G^p=F_c^p(I)/F_c^{p+1}(I)$. On obtient alors un octaèdre dans $\mathrm{D}(X_{\mathrm{Nis}})$:

$$\begin{tikzcd}
& F_c^{p+1}(I) \arrow[rr] \arrow[dl] & & F_c^p(I) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
I \arrow[dr, "i_{p+1}^*"'] \arrow[r, phantom, "*"] & {} & G^p \arrow[ul, "+1"'] \arrow[dl] \arrow[u, phantom, "*"] \arrow[d, phantom, "*"] & {} \arrow[r, phantom, "*"] & I \arrow[dl, "i_p^*"] \\
& \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_X(X-Z^{p+1}),I) \arrow[uu, "+1"] \arrow[rr, "f_p^*"'] & & \underline{\mathrm{Hom}}(\mathbb{Z}_X(X-Z^p),I) \arrow[uu, "+1"'] \arrow[ul, "+1"] &
\end{tikzcd}$$

qui montre que la suite spectrale d'hypercohomologie du complexe filtré (I,F_c^p) est canoniquement isomorphisme à $E_{1,c}^{p,q}$. Ainsi, on peut calculer le $(p+q)$-ème faisceau de cohomologie du complexe G^p :

$$\underline{\mathrm{H}}^{p+q}(G^p)=C^p(.,\underline{\hat{\mathrm{H}}}^q_*(\mathbb{E}))_0$$

où le complexe de cycles à coefficients dans $\underline{\hat{\mathrm{H}}}^q(\mathbb{E})$ est vu comme un faisceau Nisnevich sur X_{Nis} – rappelons en effet que ce dernier est fonctoriel par rapport aux morphismes étales. Si l'on considère $\mathcal{E}_{1,c}^{p,q}$ la suite spectrale du complexe filtrée (I,F_c^p) dans la catégorie abélienne $\tilde{X}_{\mathrm{Nis}}$, on obtient même un isomorphisme de complexes de faisceaux :

$$\mathcal{E}_{1,c}^{*,q}=C^*(.,\underline{\hat{\mathrm{H}}}^q_*(\mathbb{E}))_0. \tag{6.4.b}$$

Notons $F_{triv}(I)$ la filtration triviale sur I :

$$F_{triv}^p(I)=\begin{cases} I & \text{si } p<0\\ 0 & \text{sinon,}\end{cases}$$

et $\mathcal{E}_{r,triv}^{p,q}$ la suite spectrale dans $\tilde{X}_{nis}$ qui lui est associée. Evidemment, $\mathcal{E}_{1,triv}^{*,q}$ est un complexe concentré en degré 0 égal au faisceau $\underline{\mathrm{H}}^q(I)$.

On peut alors considérer le morphisme canonique de complexes filtrés :

$$\varphi' : (I, F_{triv}) \to (I, F_c).$$

Il résulte du calcul (6.4.b) que le morphisme de complexes de faisceaux induit par φ'

$$\mathcal{E}_{1,triv}^{*,q} \to \mathcal{E}_{1,c}^{*,q}$$

est un quasi-isomorphisme pour tout $q \in \mathbb{Z}$. Evalué en un X-schéma étale V, ce quasi-isomorphisme correspond au morphisme d'augmentation canonique

$$\Gamma(V, \underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})) \to C^*(V, \hat{\underline{\mathrm{H}}}_*^q(\mathbb{E}))_0.$$

Il en résulte que le morphisme induit sur les termes de la deuxième page

$$\mathcal{E}_{2,triv}^{p,q} \to \mathcal{E}_{2,c}^{p,q} \tag{6.4.c}$$

est le morphisme nul si $p \neq 0$, et correspond pour $p = 0$ à l'isomorphisme canonique de la proposition 3.6

$$\underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E}) \to A^0(., \hat{\underline{\mathrm{H}}}_*^q(\mathbb{E}))_0.$$

Soit Dec le foncteur de « décalage de la filtration » définit dans [**Del71**, 1.3.3]. Le morphisme φ' induit donc un morphisme entre les filtrations décalées :

$$\varphi'' : (I, Dec(F_{triv})) \to (I, Dec(F_c))$$

Notons que d'après [**Del71**, 1.4.6], $Dec(F_{triv})$ est la filtration *canonique* sur I – qui correspond à la filtration pour la t-structure homotopique sur $\mathbb{E}$ d'après le choix de I. Il résulte de [**Del71**, 1.3.15] et du calcul précédent que φ'' est un quasi-isomorphisme de complexes filtrés. Il induit donc un isomorphisme au niveau des couples exacts associés dans la catégorie $D(\tilde{X}_{\mathrm{Nis}})$ et a fortiori un isomorphisme de suite spectrales d'hypercohomologies. L'isomorphisme ainsi obtenu sur la première page des suites spectrales (*cf.* [**Del71**, 1.3.4]) est de la forme

$$(\varphi'')_*^{p,q} : E_{2,t}^{p,q} \to E_{2,c}^{p,q}.$$

Compte tenu de l'identification de l'isomorphisme (6.4.c) obtenue ci-dessus, $(\varphi'')_*^{p,q}$ s'identifie à $\varphi_2^{p,q}$ ce qui permet de conclure. □

6.5. — Notons $E_{r,c}^{p,q}(X, \mathbb{E})$ la suite spectrale du coniveau associée au schéma lisse X et au motif $\mathbb{E}$ comme ci-dessus. Le corollaire principal de la proposition précédente est la fonctorialité de la suite spectrale du coniveau. Les cas les plus importants sont la compatibilité au pullback, pushout et action de la cohomologie motivique :

- Un morphisme, ou même une correspondance finie, $f : Y \to X$ entre schémas lisses induit un morphisme de suites spectrales :

  $$f^* : E_{r,c}^{p,q}(X, \mathbb{E}) \to E_{r,c}^{p,q}(Y, \mathbb{E})$$

  qui converge vers le morphisme $f^* : H^{p+q}(X, \mathbb{E}) \to H^{p+q}(Y, \mathbb{E})$.
- Soit $f : Y \to X$ un morphisme projectif de dimension relative pure n entre schémas lisses. Rappelons que l'on associe à f un morphisme de Gysin f^* :

$M(X)(n)[2n] \to M(Y)$ (*cf.* [**Dég08a**, 2.7]). On en déduit un morphisme de suites spectrales :

$$f_* : E_{r,c}^{p,q}(Y, \mathbb{E}) \to E_{r,c}^{p-2n,q}(X, \mathbb{E}(-n))$$

qui converge vers le morphisme $f_* : H^{p+q}(Y, \mathbb{E}) \to H^{p+q-2n}(X, \mathbb{E}(-n))$.

– Considérons une classe $x \in H_{\mathcal{M}}^{i,n}(X)$ dans la cohomologie motivique de X. On en déduit un morphisme

$$\gamma_x : E_{r,c}^{p,q}(X, \mathbb{E}) \to E_{r,c}^{p+i,q}(X, \mathbb{E}(n))$$

qui converge vers $\gamma_x : H^{p+q}(X, \mathbb{E}) \to H^{p+q+i}(X, \mathbb{E}(n))$.

6.6. — Fixons un corps K de caractéristique 0. Si V est un K-espace vectoriel, on note $V^\vee$ le dual de V.
Considérons une théorie de Weil mixte E à coefficients dans K, au sens de [**CD09b**]. Rappelons qu'il s'agit d'un préfaisceau en K-algèbres différentielles graduées sur la catégorie des k-schémas affines lisses dont l'hypercohomologie Nisnevich peut être étendue en un foncteur covariant monoïdal

$$R_E : DM(k) \to \mathrm{D}(K).$$

Plus précisément, on obtient avec ces notations, pour tout schéma lisse X et tout entier $p \in \mathbb{Z}$,

$$H^p(X, E) = H^p\big(R_E(M(X))^\vee\big).$$

Par ailleurs, on associe à E un spectre motivique $\mathbb{E}$ (*cf.* [**CD09b**, 2.7.6, 2.7.9]) tel que :

$$H^p(X, E) = \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(X), \mathbb{E}[p]). \,^{(28)}$$

Notons que le faisceau avec transferts $\mathbb{E}_0$ s'identifie, après oubli des transferts, au faisceau E_{Nis} associé au préfaisceau E.

Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $K(n) = H^1_{\mathrm{Nis}}(\mathbb{G}_m, E)^{\otimes n}$, $K(-n) = K(n)^\vee$ – par définition de E, ces espaces vectoriels sont de dimension 1. Pour tout K-espace vectoriel V, on pose $V(\pm n) = V \otimes K(\pm n)$. L'isomorphisme canonique ci-dessus s'étend avec ces notations :

$$H^p(X, E)(n) = \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(X), \mathbb{E}(n)[p]). \,^{(29)}$$

On en déduit donc la suite spectrale du coniveau à coefficiens dans $\mathbb{E}$:

$$E_{1,c}^{p,q} = \bigoplus_{x \in X^{(p)}} H^{q-p}(\kappa(x), E)(-p) \Rightarrow H^{p+q}(X, E). \tag{6.6.a}$$

D'après le théorème précédent, cette suite spectrale est canoniquement isomorphe – à partir du terme E_2 – à la suite spectrale d'hyper-cohomologie pour la t-structure homotopique sur $DM(k)$:

$$E_{2,t}^{p,q} = H^p(X, \underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})) \Rightarrow H^{p+q}(X, E). \tag{6.6.b}$$

28. Avec ces notations, $R_E(\mathbb{F}) = \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}_{DM(k)}(\mathbb{1}, \mathbb{E} \otimes \mathbb{F})$.
29. Ainsi, le spectre $\mathbb{E}$ est ≪ $\mathbb{1}(1)$-périodique ≫ : il existe un isomorphisme (non canonique) $E \simeq E(1)$.

Il en résulte que la filtration par coniveau sur $H^*(X,E)$ coincide avec la filtration donnée par la t-structure homotopique relativement à $\mathbb{E}$.

Ce résultat est à comparer avec la proposition (6.4) de [**BO74**], d'autant plus que d'après la démonstration de 6.4, la suite spectrale (6.6.b) s'identifie à la suite spectrale d'hypercohomologie Nisnevich associée au complexe E_{Nis} sur le site X_{Nis}. Le faisceau $\underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})$ s'identifie avec le faisceau Nisnevich associé au préfaisceau

$$\underline{\check{\mathrm{H}}}_0^q(E) : X \mapsto H^q(X,E).$$

Comme ce dernier est un préfaisceau invariant par homotopie avec transferts, $\underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})$ s'identifie encore au faisceau Zariski associé à $\underline{\check{\mathrm{H}}}_0^q(\mathbb{E})$ (*cf.* [**Dég04**, 4.4.16]) – il coincide donc avec le faisceau noté $\mathcal{H}^q$ dans [**BO74**] une fois oublié les transferts.

Comme E est sans torsion, il résulte de [**Voe00a**, 5.24] que $\underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})$ est un faisceau étale. De plus, d'après [**Voe00a**, 5.7, 5.28],

$$H^p(X,\underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})) = H^p_{\mathrm{Zar}}(X,\underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})) = H^p_{\text{ét}}(X,\underline{\mathrm{H}}_0^q(\mathbb{E})).$$

On peut démontrer de plus que la suite spectrale (6.6.b) coincide avec la suite spectrale d'hyper-cohomologie étale (resp. Zariski) associé au complexe E_{Nis}. Pour la topologie étale, cela résulte directement de l'équivalence

$$DM_-^{eff}(k) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\sim} DM_{-,\text{ét}}^{eff}(k) \otimes \mathbb{Q}$$

prouvé par Voevodsky (*cf.* [**Voe00b**, 3.3.2]).

Pour résumer [(30)] :

Corollaire 6.7. — *Soit E une théorie de Weil mixte à coefficients dans K, E_{Nis} le faisceau Nisnevich et $\mathbb{E}$ le spectre motivique qui lui sont associés.*

1. *Pour tout schéma lisse X, la filtration par coniveau sur X induit une suite spectrale convergente*

$$E_{1,c}^{p,q}(X,\mathbb{E}) \Rightarrow H^{p+q}(X,E)$$

dont le complexe sur la ligne q est $E_{1,c}^{*;q}(X,\mathbb{E}) = C^*(X,\underline{\hat{\mathrm{H}}}_*^q\mathbb{E})_0$.

2. *Cette suite spectrale s'identifie à partir du terme E_2 avec la suite spectrale* (6.6.b) *induite par la filtration sur $\mathbb{E}$ donnée par la t-structure homotopique de $DM(k)$.*

3. *Elle s'identifie encore avec les suites spectrales d'hyper-cohomologie Nisnevich et étale de X à coefficients dans E_{Nis}.*

30. Signalons que le premier point de cette proposition a été obtenu dans [**Dég08a**].

PARTIE III
APPLICATIONS ET COMPLÉMENTS

7. Morphismes de Gysin et correspondances

Soit $f : Y \to X$ un morphisme fini équidimensionnel entre schémas lisses. Suivant [**Dég08a**, 2.7], on associe à f un morphisme de Gysin $f^* : M(X) \to M(Y)$ dans $DM(k)$. Par ailleurs, la transposée du graphe de f définit une correspondance finie ${}^{\mathrm{t}}f : X \bullet\!\!\longrightarrow Y$, qui a son tour induit un morphisme ${}^{\mathrm{t}}f_* : M(X) \to M(Y)$ dans $DM(k)$. Dans [**Dég08a**, 2.13], on a montré que $f^* = {}^{\mathrm{t}}f_*$ si f est étale. On obtient ici la généralisation dans le cas ramifié :

Proposition 7.1. — *Avec les notations ci-dessus, $f^* = {}^{\mathrm{t}}f_*$.*

Démonstration. — On pose $\alpha = f^* - {}^{\mathrm{t}}f_*$ et on montre que $\alpha = 0$. Il suffit de montrer que pour tout $\mathbb{E} \in DM(k)$, le morphisme

$$\mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(Y), \mathbb{E}) \xrightarrow{\alpha^*} \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(X), \mathbb{E})$$

est nul. Comme la t-structure homotopique sur $DM(k)$ est non dégénérée, il suffit de traiter le cas où $\mathbb{E}$ est dans le coeur homotopique. On peut donc supposer que $\mathbb{E}$ est un module homotopique. Ce cas résulte finalement de la proposition 3.11 et de la formule (2.5.a). □

8. Borne inférieure et constructibilité des modules de cycles

On introduit l'hypothèse suivante sur le corps k :

($\mathcal{M}_k$) Pour tout corps de fonctions E/k, il existe un k-schéma projectif lisse dont le corps des fonctions est k-isomorphe à E.

Cette hypothèse est évidemment une conséquence de la résolution des singularités au sens classique pour k.

Le résultat suivant est bien connu [31] :

Proposition 8.1. — *Soit d un entier et $\mathscr{P}_{\leq d}$ la sous-catégorie triangulée de $DM(k)$ engendrée par les motifs de schémas projectifs lisses de dimension inférieure à d.*

Soit X un schéma lisse de dimension inférieure à d.

(i) *Si ($\mathcal{M}_k$) est vérifiée, $M(X)$ appartient à $\mathscr{P}_{\leq d}$.*

(ii) *Le motif rationel $M(X) \otimes \mathbb{Q}$ appartient à $\mathscr{P}_{\leq d} \otimes \mathbb{Q}$.*

On en déduit le résultat suivant :

Proposition 8.2. — *Soit X un schéma de dimension d et $(n, i) \in \mathbb{Z}^2$ un couple d'entiers.*

31. On obtient une preuve très élégante en utilisant un argument dû à J. Riou facilement adapté de la preuve de [**Rio05**, th. 1.4].

(i) *Si X est projectif lisse, $\hat{h}_{i,-n}(X) = 0$ si $n > d$.*

(ii) *Si $(\mathcal{M}_k)$ est vérifiée, $\hat{h}_{i,-n}(X) = 0$ si $n > d$.*

(iii) *Dans tous les cas, $\hat{h}_{i,-n}(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$ si $n > d$.*

Démonstration. — Le point (i) est un corollaire de la formule (5.16.a) et du théorème de simplification de Voevodsky car ce dernier affirme qu'il n'y a pas de cohomologie motivique en poids strictement négatif.

Soit $\mathscr{C}_{\leq d}$ la sous-catégorie pleine de $DM(k)$ formée des motifs $\mathcal{M}$ tel que pour tout corps de fonctions E et tout couple $(n, i) \in \mathbb{Z}^2$, $n > d$,

$$\mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(E), \mathcal{M}\{-n\}[-i]) = 0.$$

Cette catégorie est une sous-catégorie triangulée. D'après (i), elle contient les motifs $M(P)$ pour P projectif lisse de dimension inférieure à d. La proposition précédente permet donc de conclure. □

Définition 8.3. — Nous dirons qu'un module homotopique (resp. module de cycles) est *constructible* s'il appartient à la sous-catégorie épaisse [(32)] de $HI_*(k)$ (resp. $\mathscr{M}Cycl(k)$) engendrée par les objets $\sigma^\infty h_i(X)\{n\}$ (resp. $\hat{h}_i(X)\{n\}$) pour un schéma lisse X et un couple d'entiers $(n, i) \in \mathbb{Z}^2$.

Remarque 8.4. —
1. Grâce à la t-structure homotopique, on peut considérer une autre condition de finitude sur les modules homotopiques. Un module homotopique F_* est dit *fortement constructible* s'il est de la forme $\underline{\mathrm{H}}^0_*(\mathbb{E})$ pour un motif géométrique $\mathbb{E}$. [(33)] Dans ce cas, F_* est constructible dans le sens précédent mais la réciproque n'est pas claire.
2. Les modules homotopiques constructibles ne jouissent pas des propriétés de finitude de leur analogue l-adique. Ainsi, il y a lieu de considérer parallèlement la notion plus forte de module homotopique *de type fini* [(34)] : F_* est de type fini s'il existe un épimorphisme $\sigma^\infty h_0(X) \to F_*$. Ces subtilités interviennent car le foncteur $\underline{\mathrm{H}}^0$ ne préserve pas la propriété d'être géométrique (*i.e.* compact) – contrairement à son analogue l-adique, le foncteur cohomologique associé à la t-structure canonique, qui lui préserve la constructibilité.
3. Dans le prolongement de la remarque précédente, notons qu'il est probable que la plupart des modules homotopiques constructibles ne soient pas fortement dualisables. La seule exception que l'on connaisse à cette règle est le cas d'un k-schéma étale X et du module homotopique $\sigma^\infty h_0(X)$. Ce dernier est fortement dualisable dans $HI_*(k)$ (ou même dans $HI(k)$) et il est son propre dual fort.

Corollaire 8.5. — *La graduation canonique d'un module de cycles constructible M est bornée inférieurement dès que l'une des deux propriétés suivantes est réalisée :*

32. *i.e.* stable par noyau, conoyau, extension, sous-objet et quotient.

33. De même, un module de cycles est fortement constructible si le module homotopique associé l'est.

34. Cette notion, introduite dans la thèse de l'auteur [**Dég02**], a été étudiée indépendamment par J. Ayoub dans l'appendice de [**HK06**].

– *La propriété* $(\mathcal{M}_k)$ *est satisfaite.*
– M *est sans torsion.*

9. Homologie de Borel-Moore

On suppose k de caractéristique 0. Dans [**Voe00b**, par. 4], Voevodsky associe à tout schéma algébrique X un motif à support compact $M^c(X)$ dans $DM_{gm}(k)$ vérifiant les propriétés suivantes :

(C1) Si X est propre, $M^c(X) = M(X)$.

(C2) $M^c(X)$ est covariant par rapport aux morphismes propres, contravariant par rapport aux morphismes étales.

(C3) Si $i : Z \to X$ est une immersion fermée d'immersion ouverte complémentaire $j : U \to X$, il existe un triangle distingué canonique :
$$M^c(Z) \xrightarrow{i_*} M^c(X) \xrightarrow{j^*} M^c(U) \xrightarrow{+1}$$

(C4) Si X est lisse de dimension pure d, $M(X)$ est fortement dualisable avec pour dual fort $M^c(X)(-d)[-2d]$.

Considérons un module de cycles ϕ ainsi que le module homotopique F_* qui lui est associé d'après le théorème 3.4.

Considérons un schéma lisse X connexe de dimension d. Pour un couple d'entier $(n, r) \in \mathbb{Z}$, on obtient les isomorphismes suivants :
$$\begin{aligned} &A_{d-n}(X, \phi)_{r-d} = A^n(X, \phi)_r \stackrel{(1)}{=} H^n(X, F_r) \\ &= \mathrm{Hom}_{DM(k)}(M(X), F_*\{r\}[n]) \stackrel{(2)}{=} \mathrm{Hom}_{DM(k)}(\mathbb{1}[d-n], M^c(X)\{r-d\}). \end{aligned}$$
où (1) résulte de 3.6 et (2) de la propriété (C4).
Nous dirons qu'un schéma X est lissifiable si il existe une immersion fermée de X dans un schéma lisse. Utilisant la propriété (C3) ci-dessus et la suite exacte longue de localisation pour les groupes de Chow à coefficients, on en déduit aisément :

Corollaire 9.1. — *Soit ϕ un module de cycles et F_* le module homotopique lui correspondant par l'équivalence de 3.4. Pour tout schéma lissifiable X et tout couple $(i, s) \in \mathbb{Z}^2$, il existe un isomorphisme canonique*[35] *:*
$$A_i(X, \phi)_s \simeq \mathrm{Hom}_{DM(k)}(\mathbb{1}[i], M^c(X) \otimes F_*\{s\}).$$

En utilisant la fonctorialité de la suite exacte longue de localisation et du motif à support compact (*cf.* (C2)), cet isomorphisme est fonctoriel covariant par rapport aux morphismes propres, contravariant par rapport aux morphismes étales. Si on utilise de plus la fonctorialité étendue aux morphismes plats du motif à support compact (*cf.* [**Voe00b**, 4.2.4]), on obtient même la fonctorialité contravariante de cet isomorphisme par rapport aux morphismes plats.

35. On démontre notamment qu'il ne dépend pas du plongement dans un schéma lisse.

Remarque 9.2. — 1. Le membre de droite de l'isomorphisme du corollaire précédent mérite le nom d'homologie de Borel-Moore de F_* en degré i (et $\mathbb{G}_m$-twist s). L'isomorphisme est alors à comparer avec l'isomorphisme entre homologie motivique de Borel-Moore et groupes de Chow supérieurs (*cf.* [**Voe00b**, 4.2.9]).

2. On peut se passer de l'hypothèse que X admet un plongement dans un schéma lisse en utilisant le ≪ truc de Jouanolou ≫.
3. Le corollaire précédent utilise uniquement les propriétés (C1) à (C4) du motif à supports compacts. Quitte à travailler rationellement, on peut obtenir ces propriétés (*cf.* [**CD07**]) et prolonger ainsi la conclusion du corollaire au cas d'un corps parfait quelconque.

10. Motifs birationnels

Rappelons la définition des *complexes motiviques birationnels* due à B. Kahn et R. Sujatha (*cf.* [**KS02**]) :

***Définition 10.1* (Kahn, Sujatha).** — On note $DM^\circ(k)$ (resp. $DM^\circ_{gm}(k)$) la localisation de la catégorie $DM^{eff}(k)$ (resp. enveloppe pseudo-abélienne de la localisation de $DM^{eff}_{gm}(k)$) par rapport à la classe de flèches formée des morphismes $M(U) \xrightarrow{j_*} M(X)$ où j est une immersion ouverte et X un schéma lisse.

Suivant [**KS02**], le foncteur canonique $DM^{eff}(k) \to DM^\circ(k)$ est noté $\nu_{\leq 0}$ – *cf.* [**KS02**, 6.3]. La catégorie $DM^\circ(k)$ est une localisation de Bousfield à gauche de la catégorie homotopique $DM^{eff}(k)$. On en déduit que $\nu_{\leq 0}$ admet un adjoint à droite $i : DM^\circ(k) \to DM^{eff}(k)$ pleinement fidèle qui identifie la catégorie $DM^\circ(k)$ à la sous-catégorie de $DM^{eff}(k)$ formée des complexes motiviques K tels que pour toute immersion ouverte $j : U \to X$ dans un schéma lisse X, le morphisme induit $H^*(X,K) \xrightarrow{j^*} H^*(U,K)$ est un isomorphisme. Un tel complexe K est appelé suivant Kahn et Sujatha un *complexe motivique birationnel*.

Remarque 10.2. — D'après un fait général sur les localisations de Bousfield (*cf.* [**CD09b**, §5]), la catégorie $DM^\circ_{gm}(k)$ s'identifie à la sous-catégorie pleine des objets compacts de $DM^\circ(k)$ par le foncteur canonique $DM^\circ_{gm}(k) \to DM^\circ(k)$ – *cf.* [**KS02**, 6.4.c]. Par ailleurs, la catégorie $DM^\circ(k)$ s'identifie à la localisation de $DM^{eff}(k)$ par rapport à la sous-catégorie pleine [36] $DM^{eff}(k)(1)$ – *cf.* [**KS02**, 6.4.a].

10.3. — Soit X (resp. Y) un schéma lisse connexe de corps des fonctions K (resp. L). Pour tout ouvert U (resp. V) de X (resp. Y), on obtient un morphisme

$$\begin{aligned}\varphi_{U,V} : \mathrm{Hom}_{DM^{eff}(k)}(M(U), M(V)) \to &\mathrm{Hom}_{DM^\circ(k)}(M(U), M(V)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{DM^\circ(k)}(M(X), M(Y)).\end{aligned}$$

36. Cette sous-catégorie est pleine d'après le théorème de simplification de Voeovdsky : voir 5.8.

Passant à la limite, on en déduit un morphisme canonique

$$\varphi : \mathrm{Hom}_{DM^{(0)}_{gm}(k)}(M(K), M(L)) \to \mathrm{Hom}_{DM^{\circ}(k)}(M(X), M(Y)).$$

Proposition 10.4. — *Le morphisme φ est surjectif.*

Démonstration. — Le foncteur $\nu_{\leq 0}$ est plein. Donc pour tout couple (U, V), $\varphi_{U,V}$ est surjectif. Le fonteur limite inductive préserve les épimorphismes ; ainsi, pour tout $V \subset Y$, le morphisme

$$\varphi_V : \varinjlim_{U \subset X} \mathrm{Hom}_{DM^{eff}(k)}(M(U), M(V)) \to \mathrm{Hom}_{DM^{\circ}(k)}(M(X), M(Y))$$

est surjectif. D'après [**Dég07**, 3.4.4], la source de ce morphisme est canoniquement isomorphe à $\hat{h}_0(V)(K)$. Si on considère de plus une immersion ouverte $j : V' \to V$, il résulte de la proposition 1.6 que le morphisme induit

$$\hat{h}_0(V')(K) \xrightarrow{j_*} \hat{h}_0(V)(K)$$

est un épimorphisme. Il en résulte que le système projectif $(\mathrm{Ker}(\varphi_V))_{V \subset Y}$ vérifie la condition de Mittag-Leffler ce qui permet de conclure (*cf.* par exemple [**EGA3**, 0-13.2.2]). □

Le morphisme φ n'est pas injectif en général car pour une valuation v sur un corps de fonctions E et une uniformisante π de v, le morphisme

$$s_v^{\pi} = \gamma_\pi \circ \partial_v\{-1\} : M(\kappa_v) \to M(E)$$

dépend de π alors qu'il n'en dépend pas dans les motifs birationnels d'après [**KS02**]. On en déduit donc un morphisme plein, non fidèle, de la catégorie des motifs génériques *sans twist* vers la catégorie des motifs birationnels.

10.5. — Soit E un corps de fonctions et ν un valuation éventuellement non discrète sur E. On note $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de ν qui n'est donc pas nécessairement noethérien. La proposition précédente est intéressante car elle montre que ν détermine au moins un morphisme de spécialisation $s_\nu : M(\kappa_v) \to M(E)$ – *cf.* [**KS02**].

Plus canoniquement, on peut attacher à ν un morphisme résidu. En effet, $\mathcal{O}$ est réunion filtrante de ses sous-anneaux de valuations $\mathcal{O}_v$ qui sont des k-algèbres de type fini, correspondant à une valuation géométrique v. Notons $\mathcal{I}_\nu$ l'ensemble ordonné de ces sous-k-algèbres $\mathcal{O}_v$, indexé par les valuations v correspondantes. Quitte à remplacer $\mathcal{I}_\nu$ par une partie cofinale, on peut supposer que pour tout $v \in \mathcal{I}_\nu$, $\mathrm{Frac}(\mathcal{O}_v) = E$ et la fibre spéciale de $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}) \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_v)$ est non vide. A tout valuation v de $\mathcal{I}_\nu$, de corps résiduel κ_v, on associe un morphisme résidu

$$\partial_v : M(\kappa_v)\{1\} \to M(E).$$

Ce morphisme est naturel par rapport à toute inclusion $\mathcal{O}_v \subset \mathcal{O}_w$: d'après la formule (R3b) de [**Dég08b**, 4.4.7], le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{tikzcd} M(\kappa_w)\{1\} \arrow[r, "\partial_w"] \arrow[d, "\bar{\varphi}^\sharp"'] & M(E) \arrow[d, equal] \\ M(\kappa_v)\{1\} \arrow[r, "\partial_v"] & M(E), \end{tikzcd}$$

où $\bar{\varphi} : \kappa_v \to \kappa_w$ est le morphisme induit sur les corps résiduel. En effet, l'extension $\mathcal{O}_w/\mathcal{O}_v$ est non ramifiée. Finalement, on peut donc poser

$$\partial_\nu = \text{"}\varprojlim_{v \in \mathcal{I}_\nu}\text{"}\ \partial_v : M(\kappa_\nu)\{1\} \to M(E).$$

Remarque 10.6. — Cet exemple montre que les morphismes (D1) à (D4) dégagés dans la catégorie des motifs génériques (*cf.* [**Dég08b**]) n'engendrent pas, tous les morphismes entre motifs génériques – du moins par composition *finie*. Il est d'autant plus remarquable qu'ils permettent de décrire complètement un module homotopique en tant que *morphismes de spécialisations* entre ses fibres.

Références

[Bei02] A. Beilinson – « Remarks on n-motives and correspondences at the generic point », Motives, polylogarithms and Hodge theory, Part I (Irvine, CA, 1998), Int. Press Lect. Ser., vol. 3, Int. Press, Somerville, MA, 2002, p. 35–46.

[BO74] S. Bloch & A. Ogus – « Gersten's conjecture and the homology of schemes », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **7** (1974), p. 181–201 (1975).

[Bon08] M. Bondarko – « Motivically functorial coniveau spectral sequences for cohomology ; direct summands of (co)motives of function fields », arXiv :0812.2672v1, December 2008.

[CD07] D.-C. Cisinski & F. Déglise – « Triangulated categories of motives », 2007.

[CD09a] ———, « Mixed weil cohomologies », arXiv :0712.3291v2, 2007, revised in 2009.

[CD09b] ———, « Local and stable homological algebra in Grothendieck abelian categories », *HHA* **11** (2009), no. 1, p. 219–260.

[Dég02] F. Déglise – « Modules homotopiques avec transferts et motifs génériques », Thèse, Univ. Paris VII, 2002.

[Dég04] ———, « Interprétation motivique de la formule d'excès d'intersection », *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **338** (2004), no. 1, p. 41–46, Présenté par J.P. Serre.

[Dég06] ———, « Transferts sur les groupes de chow à coefficients », *Mathematische Zeitschrift* **252** (2006), no. 2, p. 315–343.

[Dég07] ———, « Correspondences and transfers », *Algebraic cycles and motives* (J. Nagel & P. Chris, éds.), Cambridge university press, April 2007.

[Dég08a] ———, « Around the gysin triangle I », arXiv :0804.2415, avril 2008.

[Dég08b] ———, « Motifs génériques », *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova* **119** (2008), p. 173–244.

[Del71] P. Deligne – « Théorie de Hodge. II », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1971), no. 40, p. 5–57.

[Gil85] H. Gillet – ≪ Some new Gysin homomorphisms for the Chow homology of varieties ≫, *Proc. London Math. Soc. (3)* **50** (1985), no. 1, p. 57–68.

[EGA3] A. Grothendieck – ≪ Éléments de géométrie algébrique. *Rédigés avec la collaboration de J. Dieudonné.* III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents ≫, *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1961), no. 11, p. 167.

[GS99] H. Gillet & C. Soulé – ≪ Filtrations on higher algebraic K-theory ≫, Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, p. 89–148.

[HK06] A. Huber & B. Kahn – ≪ The slice filtration and mixed Tate motives ≫, *Compos. Math.* **142** (2006), no. 4, p. 907–936.

[Hov01] M. Hovey – ≪ Spectra and symmetric spectra in general model categories ≫, *J. Pure Appl. Alg.* **165** (2001), p. 63–127.

[KS02] B. Kahn & R. Sujatha – ≪ Birational Motives, I ≫, K-theory Preprint Archives 0596, October 2002.

[Lur08] J. Lurie – ≪ Derived Algebraic Geometry I : Stable ∞-Categories ≫, http ://math.mit.edu/ lurie/topoibook/DAGI.pdf, 2008.

[McC01] J. McCleary – *A user's guide to spectral sequences*, second éd., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 58, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[Mor04] F. Morel – ≪ An introduction to $\mathbb{A}^1$-homotopy theory ≫, Contemporary developments in algebraic K-theory, ICTP Lect. Notes, XV, Abdus Salam Int. Cent. Theoret. Phys., Trieste, 2004, p. 357–441 (electronic).

[Mor05] ______, ≪ The stable $\mathbb{A}^1$-connectivity theorems ≫, *K-Theory* **35** (2005), no. 1-2, p. 1–68.

[Par96] K. H. Paranjape – ≪ Some spectral sequences for filtered complexes and applications ≫, *J. Algebra* **186** (1996), no. 3, p. 793–806.

[Rio05] J. Riou – ≪ Dualité de Spanier-Whitehead en géométrie algébrique ≫, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **340** (2005), no. 6, p. 431–436.

[Ros96] M. Rost – ≪ Chow groups with coefficients ≫, *Doc. Math. J.* (1996), p. 319–393.

[SV96] A. Suslin & V. Voevodsky – ≪ Singular homology of abstract algebraic varieties ≫, *Invent. Math.* **123** (1996), no. 1, p. 61–94.

[SV00] ______, ≪ Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients ≫, The arithmetic and geometry of algebraic cycles (Banff, AB, 1998), NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., vol. 548, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 2000, p. 117–189.

[Voe00a] V. Voevodsky – ≪ Cohomological theory of presheaves with transfers ≫, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 87–137.

[Voe00b] ______, ≪ Triangulated categories of motives over a field ≫, Cycles, transfers, and motivic homology theories, Ann. of Math. Stud., vol. 143, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2000, p. 188–238.

[Voe02] ______, ≪ Cancellation theorem ≫, preprint, 2002.

septembre 2009

Frédéric Déglise, CNRS, LAGA (UMR 7539), Institut Galilée, Université Paris 13, 99 avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse FRANCE, Tel. : +33 1 49 40 35 77 • *E-mail :* `deglise@math.univ-paris13.fr`
Url : `http://www.math.univ-paris13.fr/~deglise/`

• *E-mail :* `deglise@math.univ-paris13.fr`